EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO | MATEMÁTICA A

EXAME MODELO 11

Site: http://www.mathsuccess.pt

Facebook: https://www.facebook.com/MathSuccess

EXAME MODELO N.º 11

AGOSTO DE 2021

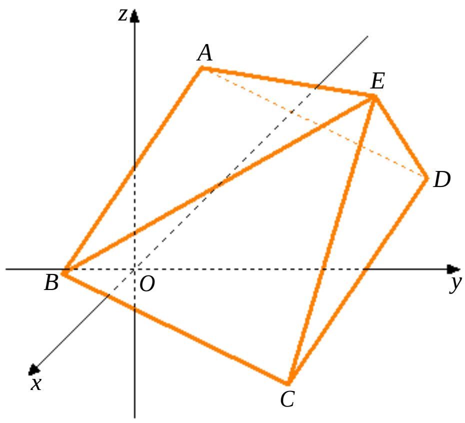
• Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

1.1., **1.2.**, **3.1.**, **3.2.**, **5.**, **7.**, **9.1.**, **9.2.**, **11.1.**, **11.2.** e **14.**

Estes itens estão assinalados no enunciado com uma caixa sombreada e um asterisco ao lado do número do item

• Dos restantes sete itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os quatro itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

1. Na figura está representado em referencial o.n. $Oxyz$ a pirâmide recta $[ABCDE]$.



Sabe-se que:

- a base $[ABCD]$ é um losango;
- $A(0,1,3)$, $\overrightarrow{AC}(2,2,-4)$ e $\overrightarrow{AD}(-1,3,-2)$
- uma equação do plano CDE é $x+19y-8z=67$
- um vector normal ao plano ABC é $\vec{n}(1,1,1)$

***1.1.** Qual das seguintes é uma equação do plano paralelo a CDE que contém o ponto B?

A $x+y+z=4$

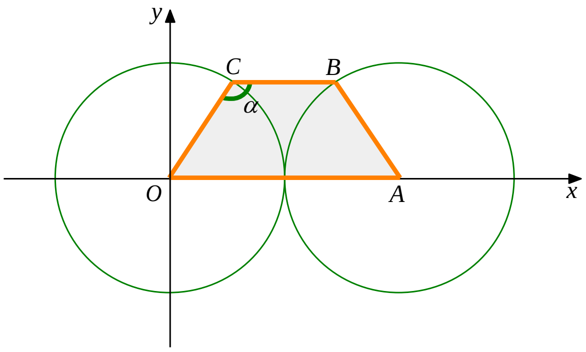
B $x+19y-8z=43$

C $x+y+z=0$

D $x+19y-8z=-5$

***1.2.** Determine o volume da pirâmide $[ABCDE]$.

2. Na figura estão representados em referencial o.n. xOy, as circunferências definidas pelas equações $x^2+y^2=1$ e $(x-2)^2+y^2=1$ e o trapézio isósceles $[OABC]$.



Sabe-se que:

- o ponto A é o centro da circunferência definida por $(x-2)^2+y^2=1$
- o ponto B pertence à circunferência centrada em A e o ponto C pertence à circunferência centrada em O
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo BCO, com $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$

Mostre que a área do trapézio $[OABC]$ é dada em função de α por:

$$2\operatorname{sen}\alpha + \frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$$

3. Numa empresa sabe-se que:

- 40% dos funcionários são homens
- $\frac{1}{8}$ dos funcionários do sexo masculino são licenciados
- entre os funcionários licenciados, três em cada quatro são mulheres

***3.1.** Nesta alínea admita que a empresa tem 120 funcionários.

Considere todas as comissões de cinco funcionários tais que:

- é constituída por duas mulheres e três homens licenciados;
- um dos membros será o presidente, outro o porta-voz e os restantes serão vogais, com tarefas indiferenciadas;
- o presidente e o porta-voz não são do mesmo sexo.

Nestas condições, quantas comissões distintas se podem formar?

A 306720 **B** 613440

C 6977880 **D** 13955760

***3.2.** Escolhe-se ao acaso um funcionário desta empresa.

Qual é a probabilidade de não ser licenciado ou ser do sexo masculino?

Apresente o resultado na forma de percentagem.

4. Considere um triângulo $[ABC]$.

Nos lados $[AC]$ e $[BC]$ acrescentaram-se n pontos, com $n \in \mathbb{N}$, de tal forma que nenhum deles coincide com os vértices do triângulo $[ABC]$.

Escolhendo, simultaneamente e ao acaso, três dos $n+3$ pontos do triângulo $[ABC]$ (os seus três vértices mais os n que foram acrescentados), a probabilidade de definirem um triângulo em que um dos lados é o lado $[AB]$ é $\frac{1}{15}$.

Recorrendo a processos analíticos, determine o valor de n?

***5.** Seja (u_n) uma progressão aritmética tal que $u_4 = 15$ e $u_{10} = 33$.

Qual é o valor de $\lim\left(\frac{u_n}{3n-6}\right)^{2n}$?

A e^{-2}

B e^{3}

C e^{6}

D $+\infty$

6. Seja (u_n) uma progressão geométrica não monótona tal que $4u_3 + 3u_5 = u_7$.

Estude quando à monotonia a sucessão (v_n) definida por $v_n = \frac{3n+r}{rn-1}$, sendo r a razão da progressão geométrica (u_n).

***7.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

O afixo do número complexo $\frac{z^3}{\overline{z}\,i}$ pertence:

A à bissectriz dos quadrantes ímpares.

B ao eixo real.

C à bissectriz dos quadrantes pares.

D ao eixo imaginário.

8. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = -\frac{4e^{i\alpha}(2-i)}{1+2i}$, com $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

Sabe-se que z e $ri - \sqrt{r^2 3}$, com $r > 0$, são raízes quartas de um mesmo número complexo.

Determine r e α.

9. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases} x^3e^x & \text{se} \quad x\leq 0 \\ x+\dfrac{\ln^2 x}{x} & \text{se} \quad x>0 \end{cases}$$

***9.1.** Estude a função f quanto à existência de assimptotas não verticais do seu gráfico.

Caso existam, indique as suas equações.

***9.2.** Seja r a recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa -1.

A recta r intersecta eixo Ox no ponto A e o eixo Oy no ponto B.

Mostre que a área do triângulo $[AOB]$ é $\dfrac{1}{4e}$.

Na sua resposta deve:

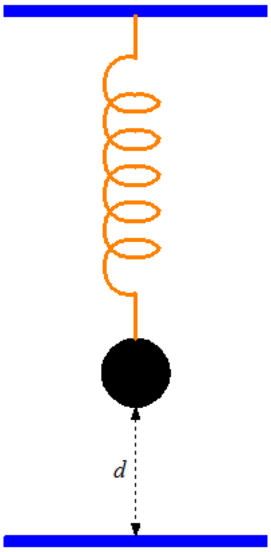
- escrever a equação reduzida da recta r
- indicar as coordenadas dos pontos A e B
- mostrar o pretendido

10. Considere as funções f e g , de domínio $\mathbb{R}$, tais que:

- f é derivável no seu domínio;
- $g(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{x+1}-(x+2)^2}{x^2+x} & \text{se} \quad x<-1 \\ \dfrac{2x\,f(x)}{x+2} & \text{se} \quad x\geq -1 \end{cases}$
- g é contínua em todo o seu domínio.

Qual é o valor de $f(-1)$?

11. Na figura está representada uma esfera suspensa numa mola que oscila verticalmente.



Admita que a distância, em centímetros, que a esfera se encontra do solo, t segundos após o início do movimento oscilatório é dada pela função d , definida por:

$$d(t) = 3 + 4e^{-0,31t}\,\mathrm{sen}\left(\frac{8\pi t}{3}\right), \text{ com } t \geq 0$$

***11.1.** Admita que no início do movimento, a distância do centro da esfera ao solo é de $3,5\,\mathrm{cm}$.

Qual é, em centímetros cúbicos, a medida do volume da esfera?

A $\frac{\pi}{6}$ **B** $\frac{\pi}{4}$ **C** $\frac{\pi}{3}$ **D** $\frac{\pi}{2}$

***11.2.** Durante o quarto segundo do movimento existem exactamente dois instantes tais que passados três segundos e meio a distância da bola ao solo diminui 15% .

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora determine esse instante.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;

- reproduzir o(s) gráfico(s) que considerar necessário(s) para a resolução do problema bem como a(s) coordenada(s) de algum (ou alguns) ponto(s) relevante(s);

- apresentar o instante pedido, em segundos, arredondado às décimas.

12. Seja f a função de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\left(x^2-2\right)e^{3-x^2}-ax$, com $a\in\mathbb{R}$.

Mostre que se $\ln a<-1\ \vee\ \ln a>2$ então a função f tem pelo menos um zero no intervalo $]-1,2[$.

13. Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da inequação:

$$\ln\left(\frac{e^x-1}{3}\right)\leq x-\ln\left(2e^{-x}+5\right)$$

***14.** Considere a função h, de domínio $\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$, definida por $h(x)=\operatorname{sen}^2 x-2\cos x$.

Estude a função h quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta deve:

- indicar o(s) intervalo(s) onde o gráfico da função h tem a concavidade voltada para baixo;
- indicar o(s) intervalo(s) onde o gráfico da função h tem a concavidade voltada para cima;
- indicar as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão.

F I M

As pontuações obtidas nas respostas a estes onze itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.1.	1.2.	3.1.	3.2.	5.	7.	9.1.	9.2.	11.1.	11.2.	14.	Subtotal
Cotação (em pontos)	12	14	12	14	12	12	14	14	12	14	14	144
Destes sete itens, contribuem para a classificação final da prova os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	2.	4.	6.	8.	10.	12.	13.					Subtotal
Cotação (em pontos)	4×14											56
TOTAL												200

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

1.

1.1. Tem-se que $B = A + \overrightarrow{AB}$ e que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$. Mas como $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD}$, vem que:

$$D = A + \overrightarrow{AB} = A + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = (0,1,3) + (2,2,-4) - (-1,3,-2) = (3,0,1)$$

Seja α o plano paralelo a CDE que contém o ponto B.

Como α e CDE são paralelos, todos os vectores normais a CDE são também normais a α, pelo que $\vec{n}(1,19,-8)$ é um vector normal a α, dado que este é um vector normal a CDE.

Portanto, $\alpha : x + 19y - 8z + d = 0$. Como $B(3,0,1)$ pertence a α, substituindo, vem:

$$3 + 19 \times 0 - 8 \times 1 + d = 0 \Leftrightarrow -5 + d = 0 \Leftrightarrow d = 5$$

$\therefore\ \alpha : x + 19y - 8z + 5 = 0 \Leftrightarrow x + 19y - 8z = -5$

Resposta: D

1.2. Sendo M o ponto médio do segmento de recta $[AC]$, tem-se que $V_{[ABCDE]} = \dfrac{A_{[ABCD]} \times \overline{ME}}{3}$.

Portanto, como $[ABCD]$ é um losango, vem que $A_{[ABCD]} \dfrac{\overline{AC} \times \overline{BD}}{2}$.

Assim:

- $\overline{AC} = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|(2,2,-4)\right\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$
- $M = A + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} = (0,1,3) + \dfrac{1}{2} \times (2,2,-4) = (1,2,1)$
- $D = A + \overrightarrow{AD} = (0,1,3) + (-1,3,-2) = (-1,4,1)$, pelo que $\overrightarrow{DM} = M - D = (1,2,1) - (-1,4,1) = (2,-2,0)$

Logo, $\overline{BD} = \left\|\overrightarrow{BD}\right\| \underset{\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DM}}{=} \left\|2\overrightarrow{DM}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{DM}\right\| = 2\left\|(2,-2,0)\right\| = 2\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 0^2} = 2\sqrt{8} = 2 \times 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

Nota: podíamos ter usado as coordenadas de B encontradas em 1.1. e fazer $\overline{BD} = 2\overline{BM} = 2\left\|\overrightarrow{BM}\right\|$ ou determinar na mesma as coordenadas de D e calcular directamente $\overline{BD}$.

Logo, $A_{[ABCD]}\dfrac{\overline{AC}\times\overline{BD}}{2}=\dfrac{\cancel{2}\sqrt{6}\times 4\sqrt{2}}{\cancel{2}}=4\sqrt{6\times 2}=4\sqrt{3\times 2\times 2}=4\times 2\sqrt{3}=8\sqrt{3}$.

Por outro lado, o ponto E é a intersecção da recta r , que contém o M e é perpendicular ao plano ABC , com o plano CDE .

Portanto, um vector director de r é $\vec{n}(1,1,1)$, pelo que $r:(x,y,z)=(1,2,1)+k(1,1,1)$, $k\in\mathbb{R}$

Um ponto genérico da recta r é $(1+k,2+k,1+k)$, $k\in\mathbb{R}$, pelo que substituindo na equação do plano CDE , vem:

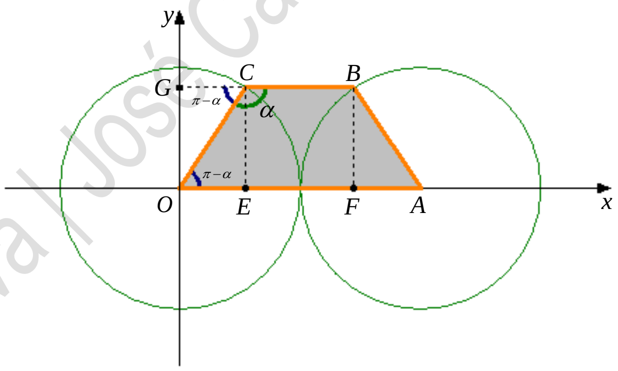
$$1+k+19(2+k)-8(1+k)=67\Leftrightarrow 1+k+38+19k-8-8k=67\Leftrightarrow 12k=67-31\Leftrightarrow 12k=36\Leftrightarrow k=3$$

Logo, $E(1+3,2+3,1+3)$, ou seja, $E(4,5,4)$ e portanto $\overrightarrow{ME}=E-M=(4,5,4)-(1,2,1)=(3,3,3)$, de onde:

$$\left\|\overrightarrow{ME}\right\|=\sqrt{3^2+3^2+3^2}=\sqrt{3\times 3^2}=\sqrt{3}\times\sqrt{3^2}=3\sqrt{3}$$

$$\therefore\ V_{[ABCDE]}=\frac{A_{[ABCD]}\times\overline{ME}}{3}=\frac{8\sqrt{3}\times\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{3}}=8\times\left(\sqrt{3}\right)^2=8\times 3=24$$

2. Consideremos a seguinte figura:



Tem-se que:

- as equações das circunferências são $x^2+y^2=1$ e $(x-2)^2+y^2=1$, pelo que as coordenadas do ponto A são $(2,0)$ e portanto $\overline{OA}=2$.

- a amplitude do ângulo GCO é $\pi-\alpha$ assim como a amplitude do ângulo EOC , pois EOC e GCO são ângulo alternos internos.

- sendo E e F , respectivamente, a projecção ortogonal dos pontos C e D sobre o eixo Ox , vem que $\overline{OE}=\overline{AF}$ e portanto $\overline{BC}=\overline{OA}-2\overline{OE}=2-2\overline{OE}$.

A área do trapézio $[OABC]$ é dada por $A_{[OABC]}=\frac{\overline{OA}+\overline{BC}}{2}\times\overline{CE}=\frac{2+2-2\overline{OE}}{2}\times\overline{CE}=\frac{4-2\overline{OE}}{2}\times\overline{CE}$.

Assim:

- $\operatorname{sen}(\pi-\alpha)=\frac{\overline{CE}}{\overline{OC}}\Leftrightarrow\underbrace{\operatorname{sen}(\pi-\alpha)}_{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{\overline{CE}}{1}\Leftrightarrow\overline{CE}=\operatorname{sen}\alpha$

- $\cos(\pi-\alpha)=\frac{\overline{OE}}{\overline{OC}}\Leftrightarrow\underbrace{\cos(\pi-\alpha)}_{\cos\alpha}=\frac{\overline{OE}}{1}\Leftrightarrow\overline{OE}=-\cos\alpha$

$$\therefore\ A_{[OABC]}=\frac{4-2\overline{OE}}{2}\times\overline{CE}=\frac{4-2(-\cos\alpha)}{2}\times\operatorname{sen}\alpha=\frac{(4+2\cos\alpha)\operatorname{sen}\alpha}{2}=\frac{4\operatorname{sen}\alpha+\overbrace{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}^{\operatorname{sen}(2\alpha)}}{2}=$$

$$=\frac{4\operatorname{sen}\alpha}{2}+\frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}=2\operatorname{sen}\alpha+\frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$$

3.

3.1. Como 40% dos funcionários são homens, vem que 60% são mulheres, ou seja, $0,6\times120=72$ são mulheres.

Sendo A e B os acontecimentos A: «o funcionário escolhido é homem» e B: «o funcionário escolhido é licenciado», vem que $P(B|A)=\frac{1}{8}$, dado que $\frac{1}{8}$ dos funcionários do sexo masculino são licenciados.

Assim, $P(B|A)=\frac{1}{8}\Leftrightarrow\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{1}{8}\underset{P(A)=0,4}{\Leftrightarrow}P(B\cap A)=\frac{1}{8}\times0,4=0,05$ e portanto $0,05\times120=6$ funcionários são homens licenciados.

Pretende-se então que a comissão tenha duas mulheres e três homens licenciados, pelo que temos de escolher duas mulheres entre as 72 e três homens licenciados entre os seis, o número de maneiras de o fazer é ${}^{72}C_2\times{}^{6}C_3$. Destes cinco funcionários (duas mulheres e três homens) temos de escolher uma mulher e um homem para os dois cargos, e em seguida permutamos os dois pelos cargos. O número de maneiras de o fazer é ${}^{2}C_1\times{}^{3}C_1\times2!$.

Logo, uma resposta é ${}^{72}C_2\times{}^{6}C_3\times{}^{2}C_1\times{}^{3}C_1\times2!=613440$.

Resposta: B

3.2. Sendo A e B os acontecimentos:

A: «o funcionário escolhido é homem» e B: «o funcionário escolhido é licenciado»

Pelo enunciado tem-se que $P(A)=40\%=0,4$ e $P(B|A)=\frac{1}{8}\Leftrightarrow\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\Leftrightarrow P(B\cap A)=0,05$.

Como entre os funcionários licenciados, três em cada quatro são mulheres, vem que $P(\bar{A}|B)=\frac{3}{4}$.

Pretende-se então $P(A\cup\bar{B})=P(A)+P(\bar{B})-\underbrace{P(A\cap\bar{B})}_{P(A)-P(A\cap B)}=P(A)+P(\bar{B})-(P(A)-P(A\cap B))=$

$$=\cancel{P(A)}+1-P(B)-\cancel{P(A)}+P(A\cap B)=1-P(B)+P(A\cap B)$$

Assim, $P(\bar{A}|B)=\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{\overbrace{P(\bar{A}\cap B)}^{P(B)-P(A\cap B)}}{P(B)}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{4}P(B)\underset{\times 4}{\Leftrightarrow}4P(B)-4\underbrace{P(A\cap B)}_{0,05}=3P(B)\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 4P(B)-3P(B)=4\times 0,05\Leftrightarrow P(B)=0,2$$

Portanto, a probabilidade pedida é:

$P(A\cup\bar{B})=1-P(B)+P(A\cap B)=1-0,2+0,05=0,85$, ou seja, $P(A\cup\bar{B})=85\%$

Nota: este item poderia ser resolvido recorrendo a uma tabela ou a um diagrama em árvore.

4. O número de casos possíveis é ${}^{n+3}C_3$, que é o número de maneiras de escolher três pontos entre os $n+3$.

Como queremos que um dos lados do triângulo seja o lado $[AB]$, o número de casos favoráveis é ${}^{2}C_2\times{}^{n+1}C_1=n+1$, escolhemos os vértices A e B (${}^{2}C_2$) e dos restantes $n+1$ vértices escolhe-se um (${}^{n+1}C_1$).

Assim, a probabilidade de os três pontos escolhidos definirem um triângulo em que um dos lados é o lado $[AB]$, é dada por:

$$\frac{n+1}{{}^{n+3}C_3}=\frac{n+1}{\frac{(n+3)!}{3!\times(n+3-3)!}}=\frac{\cancel{n+1}}{\frac{(n+3)(n+2)\cancel{(n+1)}\cancel{n!}}{6\cancel{n!}}}=\frac{6}{(n+3)(n+2)}$$

Portanto, $\frac{n+1}{{}^{n+3}C_3}=\frac{1}{15}\Leftrightarrow\frac{6}{(n+3)(n+2)}=\frac{1}{15}\Leftrightarrow 6\times 15=(n+3)(n+2)\Leftrightarrow 90=n^2+2n+3n+6\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0=n^2+5n+6-90\Leftrightarrow n^2+5n-84=0\Leftrightarrow n=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times 1\times(-84)}}{2\times 1}$$

$$\Leftrightarrow n=-12 \ \vee \ n=7$$

Como $n\in\mathbb{N}$, vem que $n=7$.

5. Seja r a razão da progressão aritmética (u_n). Tem-se:

$$u_{10}=u_4+6r\Leftrightarrow 33=15+6r\Leftrightarrow 18=6r\Leftrightarrow r=\frac{18}{6}\Leftrightarrow r=3$$

Logo, $u_n=u_4+(n-4)\times r=15+3(n-4)=15+3n-12=3n+3$.

Portanto, $\lim\left(\frac{u_n}{3n-6}\right)^{2n}=\lim\left(\left(\frac{3n+3}{3n-6}\right)^n\right)^2=\left(\lim\left(\frac{\cancel{3n}\left(1+\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}n}\right)}{\cancel{3n}\left(1-\frac{6}{3n}\right)}\right)\right)^2=\left(\lim\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{2}{n}\right)^n}\right)^2=\left(\frac{\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\lim\left(1-\frac{2}{n}\right)^n}\right)^2=$

$$=\left(\frac{e^1}{e^{-2}}\right)^2=\left(e^{1-(-2)}\right)^2=\left(e^3\right)^2=e^6$$

Resposta: C

6. Seja r a razão da progressão geométrica (u_n). Como a progressão geométrica é não monótona, vem que $r<0$.

Assim, como $u_5=u_3\times r^2$ e $u_7=u_3\times r^4$ vem que:

$$4u_3+3u_5=u_7\Leftrightarrow 4\cancel{u_3}+3\cancel{u_3}r^2=\cancel{u_3}r^4\Leftrightarrow 0=r^4-3r^2-4\underset{a=r^2\Rightarrow a^2=r^4}{\Leftrightarrow}a^2-3a-4=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\times 1\times(-4)}}{2\times 1}\Leftrightarrow a=-1 \ \vee \ a=4\underset{a=r^2}{\Leftrightarrow}\underbrace{r^2=-1}_{Eq.\ impossível\ em\ \mathbb{R}} \ \vee \ r^2=4$$

$$\Leftrightarrow r=\pm\sqrt{4}\Leftrightarrow r=-2 \ \vee \ r=2$$

Como $r<0$, vem que $r=-2$, pelo que $v_n=\frac{3n+r}{rn-1}=\frac{3n-2}{-2n-1}=\frac{3n-2}{-(2n+1)}=\frac{2-3n}{2n+1}$.

Para estudar a monotonia da sucessão (v_n) temos de estudar o sinal de $v_{n+1}-v_n$, $\forall n\in\mathbb{N}$:

$$v_{n+1}-v_n=\frac{2-3(n+1)}{2(n+1)+1}-\frac{2-3n}{2n+1}=\frac{2-3n-3}{2n+2+1}-\frac{2-3n}{2n+1}=\frac{-1-3n}{2n+3}-\frac{2-3n}{2n+1}=$$

$$=\frac{(-1-3n)(2n+1)-(2-3n)(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}=\frac{-2n-1-\cancel{6n^2}-3n-4n-6+\cancel{6n^2}+9n}{(2n+3)(2n+1)}$$

$$=\frac{\cancel{-9n}-7-\cancel{9n}}{(2n+3)(2n+1)}=-\frac{7}{(2n+3)(2n+1)}$$

Como $(2n+3)(2n+1)>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, vem que $v_{n+1}-v_n<0$, $\forall n\in\mathbb{N}$, pelo que (v_n) é monótona decrescente.

7. Tem-se que $z=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

Sendo α um argumento de z, vem que $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}}=-1$ e $\alpha\in 2.^{\circ}Q\Rightarrow\alpha=-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}$

Designando o módulo de z por r, com $r>0$, vem que $z=r\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$, pelo que:

$$\frac{z^3}{\overline{z}\,i}\underset{i=e^{i\frac{\pi}{2}}}{=}\frac{\left(r\,e^{i\frac{3\pi}{4}}\right)^3}{r\,e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}\right)}\times e^{i\frac{\pi}{2}}}=\frac{r^3e^{i\left(\frac{3\pi}{4}\times 3\right)}}{r\,e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\right)}}=\frac{r^2e^{i\frac{9\pi}{4}}}{e^{i\left(-\frac{\pi}{4}\right)}}=r^2e^{i\left(\frac{9\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)}=r^2e^{i\frac{10\pi}{4}}=r^2e^{i\frac{5\pi}{2}}=r^2e^{i\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)}=r^2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Como um argumento de $\frac{z^3}{\overline{z}\,i}$ é $\frac{\pi}{2}$, vem que o seu afixo pertence ao eixo imaginário.

Resposta: D

8. Resolução em vídeo aqui: https://youtu.be/oxpqRENpvow

9.

9.1. Resolução em vídeo aqui: https://youtu.be/FiteAO3KOEM

9.2. Resolução em vídeo aqui: https://youtu.be/zjbwNZWAIAY

10. Resolução em vídeo aqui (corresponde ao **12.2.**): https://youtu.be/NxHGNCsqbmE

11.

11.1. No início do movimento a distância da esfera ao chão é dada por:

$$d(0)=3+4e^{-0,31\times 0}\operatorname{sen}\left(\frac{8\pi\times 0}{3}\right)=3+4e^{0}\operatorname{sen}(0)=3+4\times 1\times 0=3+0=3$$

Como a distância do centro da esfera ao chão no início do movimento é igual a $3,5\,\text{cm}$, a medida do comprimento do raio da esfera é igual a $3,5-d(0)=3,5-3=0,5\,\text{cm}$.

Portanto, em centímetros cúbicos, a medida do volume da esfera é igual a:

$$V_{esfera}=\frac{4}{3}\pi\times raio^{3}=\frac{4}{3}\pi\times(0,5)^{3}=\frac{4}{3}\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{4}{3}\pi\times\frac{1}{8}=\frac{4\pi}{24}=\frac{\pi}{6}$$

Resposta: A

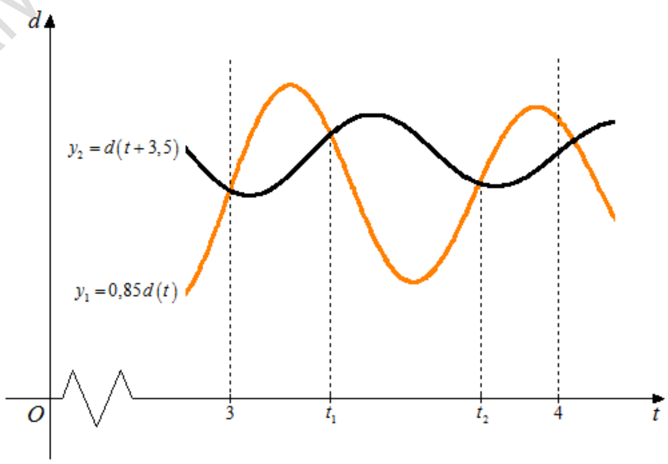
11.2. Sabemos que durante o quarto segundo de movimento existem dois instantes, t e t_2, tais que passados três segundos e meio desses instantes, a distância da bola ao solo diminui 15%.

Tem-se que $d(t)$ é a distância da bola ao solo num certo instante t e que $d(t+3,5)$ é a distância da bola ao solo três segundos e meio após esse instante t.

Assim, pretende-se terminar os instantes $t\in[3,4]$ tais que:

$$d(t+3,5)=d(t)-0,15d(t)\Leftrightarrow d(t+3,5)=0,85d(t)$$

Utilizando o editor de função da calculadora gráfica, definem-se as funções $y_1=d(t+3,5)$ e $y_2=0,85d(t)$:



Portanto, $d(t+3,5)=0,85d(t)\Leftrightarrow t=t_1\ \vee\ t=t_2$, em que $t_1\approx 3,3$ e $t_2\approx 3,8$.

12. Resolução em vídeo aqui: https://youtu.be/k6BzD8xmlko

13. Resolução em vídeo aqui: https://youtu.be/cNtk7hzKAts

14. Tem-se que:

- $h'(x)=\left(\operatorname{sen}^2 x-2\cos x\right)'=2\operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x)'+2\operatorname{sen} x=\underbrace{2\operatorname{sen} x\cos x}_{\operatorname{sen}(2x)}+2\operatorname{sen} x=\operatorname{sen}(2x)+2\operatorname{sen} x$

- $h''(x)=\left(\operatorname{sen}(2x)+2\operatorname{sen} x\right)'=(2x)'\cos(2x)+2\cos x=2\cos(2x)+2\cos x$

- $h''(x)=0 \Leftrightarrow 2\cos(2x)+2\cos x=0 \Leftrightarrow \cancel{2}\cos(2x)=-\cancel{2}\cos x \Leftrightarrow \cos(2x)=\underbrace{-\cos x}_{\cos(\pi+x)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cos(2x)=\cos(\pi+x) \Leftrightarrow 2x=\pi+x+2k\pi \ \vee \ 2x=-(\pi+x)+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\pi+2k\pi \ \vee \ 2x=-\pi-x+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\pi+2k\pi \ \vee \ 3x=\pi+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\pi+2k\pi \ \vee \ x=\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{3}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

Assim:

- se $k=0 \rightarrow x=\pi \ \vee \ x=\frac{\pi}{3}$; $\pi\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ e $\frac{\pi}{3}\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$

- se $k=1 \rightarrow x=3\pi \ \vee \ x=\pi$; $3\pi\notin\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ e $\pi\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$

- se $k=2 \rightarrow x=\underline{\qquad} \ \vee \ x=\frac{5\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}\notin\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$

- se $k=-1 \rightarrow x=-\pi \ \vee \ x=-\frac{\pi}{3}$; $-\pi\notin\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ e $-\frac{\pi}{3}\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$

Portanto, os zeros de h'' são $\frac{\pi}{3}$ e π.

Outra maneira para resolver a equação $h''(x)=0$:

$$h''(x)=0 \Leftrightarrow 2\cos(2x)+2\cos x=0 \underset{\div 2}{\Leftrightarrow} \underbrace{\cos(2x)}_{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}+\cos x=0 \Leftrightarrow \cos^2 x-\underbrace{\operatorname{sen}^2 x}_{1-\cos^2 x}+\cos x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x-\left(1-\cos^2 x\right)+\cos x=0 \Leftrightarrow \cos^2 x-1+\cos^2 x+\cos x=0$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x+\cos x-1=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times 2\times(-1)}}{2\times 1}$$

$$\Leftrightarrow \cos x=-1 \ \vee \ \cos x=\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x=\pi+2k\pi \ \vee \ x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \ \vee \ x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \ , \ k\in\mathbb{Z}$$

Assim:

- se $k=0 \rightarrow x=\pi \ \vee \ x=\frac{\pi}{3} \ \vee \ x=-\frac{\pi}{3}$; $\pi\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$, $\frac{\pi}{3}\in\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ e $-\frac{\pi}{3}\notin\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$
- se $k=1 \rightarrow x=3\pi \ \vee \ x=\frac{7\pi}{3} \ \vee \ x=\frac{5\pi}{3}$; $3\pi\notin\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$, $\frac{7\pi}{3}\notin\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ e $\frac{5\pi}{3}\notin\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$
- se $k=-1 \rightarrow x=-\pi \ \vee \ x=-\frac{5\pi}{3} \ \vee$ ______ ; $-\pi\notin\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$ e $-\frac{5\pi}{3}\notin\left[0,\frac{3\pi}{2}\right]$

Portanto, os zeros de h'' são $\frac{\pi}{3}$ e π .

Elaborando um quadro de sinal de h'' e relacionando com o sentido das concavidades do gráfico de h , vem:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{3\pi}{2}$
$h''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$-$	$-$
Gráfico de h		$\cup$	p.i.	$\cap$		$\cap$	

Nota: $h''(0)=2\cos(0)+2\cos(0)=2\times 1+2\times 1=4 \Rightarrow h''(0)>0$; $h''\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cos(\pi)+2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\times(-1)+2\times 0=-2 \Rightarrow h''\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$; $h''\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2\cos(3\pi)+2\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)=2\times(-1)+2\times 0=-2 \Rightarrow h''\left(\frac{3\pi}{2}\right)<0$.

Logo, o gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $\left[\frac{\pi}{3},\frac{3\pi}{2}\right]$, tem a concavidade voltada para cima em $\left[0,\frac{\pi}{3}\right]$ e tem um único ponto de inflexão em $x=\frac{\pi}{3}$.

Como $h\left(\frac{\pi}{3}\right)=\text{sen}^2\left(\frac{\pi}{3}\right)-2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4}-1=-\frac{1}{4}$, as coordenadas do ponto de inflexão são:

$$\left(\frac{\pi}{3},-\frac{1}{4}\right)$$

FIM