EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO | MATEMÁTICA A

EXAME MODELO 10

Site: http://www.mathsuccess.pt

Facebook: https://www.facebook.com/MathSuccess

EXAME MODELO N.º 10

JULHO DE 2021

• Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

1.1., **1.2.**, **3.**, **4.**, **6.**, **8.**, **10.1.**, **10.2.**, **13.1.**, **13.2.** e **15.**

Estes itens estão assinalados no enunciado com uma caixa sombreada e um asterisco ao lado do número do item

• Dos restantes sete itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os quatro itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

1. Considere as sucessões (u_n) e (v_n) tais que:

- a sucessão (u_n) é uma progressão aritmética de termos não nulos e razão positiva;
- a sucessão (v_n) é definida por $v_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

***1.1.** Qual das seguintes afirmações é falsa?

A a sucessão de termo geral $\frac{v_n}{u_n}$ é convergente.

B a sucessão de termo geral $\frac{n}{u_n} + v_n$ é convergente.

C a sucessão de termo geral $\frac{v_n}{u_n}$ é limitada.

D a sucessão de termo geral $\frac{n}{u_n} + v_n$ é limitada.

***1.2.** Considere agora que a soma dos três primeiros termos de (u_n) é 9 e que $u_5 + u_{14} = 66$.

Seja (w_n) a sucessão definida por $w_n = u_n + v_n$.

Qual é a soma dos cinquenta primeiros termos de (w_n)?

2. Considere uma certa linha n do triângulo de Pascal tal que ${}^{n}C_{20}$ é o maior elemento dessa linha.

Escolhendo, simultaneamente e ao acaso, três elementos desta linha, qual é a probabilidade de pelo menos dois terem valor superior ao valor de ${}^{n-1}C_9 + {}^{n-1}C_{10}$?

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondada às centésimas.

***3.** Doze amigos, entre os quais a Ana, a Bruna, o Carlos, a Diana e o Ezequiel vão ver um jogo de futebol.

Os doze sentam-se em lugares consecutivos de uma mesma fila com doze lugares.

De quantas maneiras se podem sentar, de modo que a Ana, a Bruna, o Carlos, a Diana e o Ezequiel fiquem em posições consecutivas, mas que a Ana e a Bruna não fiquem lado a lado?

A 483840

B 2903040

C 4838400

D 479001600

***4.** Uma caixa contém bolas encarnadas e pretas, todas numeradas. Sabe-se que:

- $\frac{3}{10}$ das bolas são encarnadas;
- entre todas as bolas encarnadas, 5 em cada 12 estão numeradas com um número par;
- $52{,}5\%$ das bolas são pretas e estão numeradas com um número par.

Retira-se, ao acaso, uma bola da caixa.

Qual é a probabilidade de essa bola ser encarnada, sabendo que está numerada com número par?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

5. Para um certo valor real de $k > -1$, a função g, de domínio $\left[-1, +\infty\right[$, é contínua:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x e^{x-k} - k}{\operatorname{sen}(k-x)} & \text{se} \quad -1 \leq x < k \\ x & \text{se} \quad x \geq k \end{cases}$$

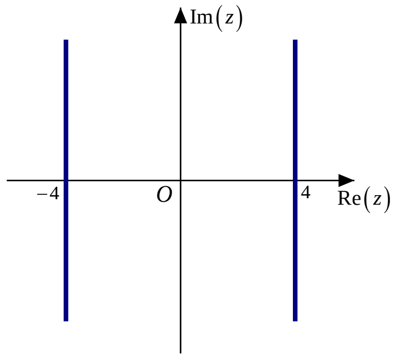
Qual é o valor de k?

***6.** Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere a condição:

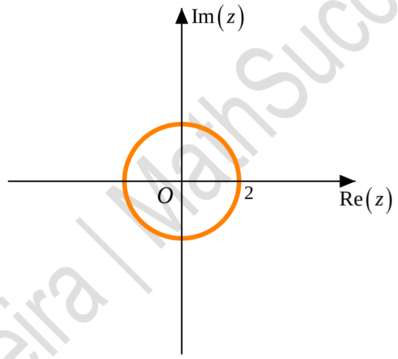
$$\left(z+\overline{z}\right)^2-\left(z-\overline{z}\right)^2=16$$

Em qual das figuras pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição?

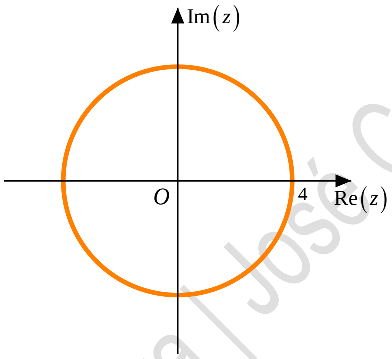
A



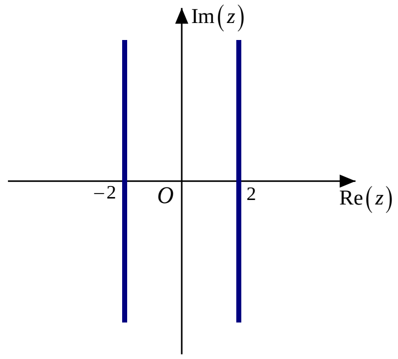
B



C



D

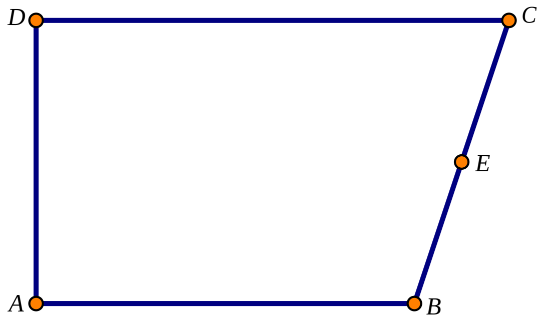


7. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere:

$$z_1=\left(i-3\right)i^{37},\ z_2=\frac{1+3i}{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}\ \text{ e }\ z_3=e^{i\alpha}\text{, com }\alpha\in\left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$$

Determine α de modo que a imagem geométrica do número complexo $\dfrac{\left(z_3\right)^3\times z_2}{z_1}$ pertença à bissectriz dos quadrantes pares.

***8.** Na figura está representado o trapézio rectângulo $[ABCD]$.



Sabe-se que:

- E é o ponto médio do lado $[BC]$
- $\overline{AB} = 8$
- $\overline{AD} = 6$
- $\overline{CD} = 10$

Qual é o valor de $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BD}$?

A -48

B -50

C -52

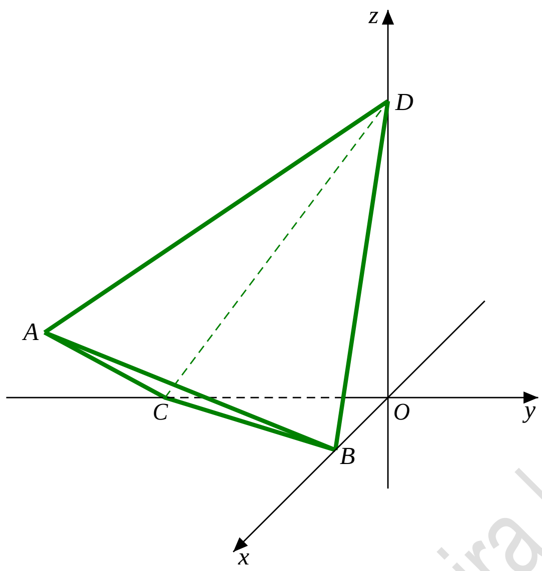
D -54

9. Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da inequação:

$$\log_4(x+3) \geq \log_4(6-2x) - \log_2\left(\sqrt{x}\right)$$

Apresente o resultado na forma de intervalo ou reunião de intervalos.

10. Na figura está representada em referencial o.n. $Oxyz$ a pirâmide $[ABCD]$.



Sabe-se que:

- os pontos B, C e D, pertencem, respectivamente, aos eixos Ox, Oy e Oz
- uma equação do plano BCD é $3x-2y+4z-12=0$
- $\overrightarrow{AB}(-8,5,-6)$

***10.1.** Determine a amplitude do ângulo ABC.

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

***10.2.** Determine a altura da pirâmide em relação à face $[BCD]$.

11. Sejam f e g as funções de domínio $\mathbb{R}^+$ definidas por

- $f(x)=4+\dfrac{x^3\ln x}{e^x}$
- $g(x)=x\left(\ln(x+8)-\ln x\right)$

Quais são os valores reais de k de modo que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{\frac{k}{3}+1} > \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$?

Apresente o resultado na forma de intervalo de números reais.

12. Seja g uma função contínua em $\mathbb{R}$, sem zeros, tal que:

$$\lim_{x\to -\infty}\left(g(x)-2x\right)=-2$$

Considere a função f, de domínio $[0,+\infty[$, definida por $f(x)=\dfrac{1-x^2}{g(-x)}$.

O gráfico de f tem uma assimptota oblíqua de declive $\dfrac{1}{2}$.

Mostre que essa é a sua única assimptota e escreva a sua equação reduzida.

13. Considere a função f, de domínio $\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$, definida por $f(x)=\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

***13.1.** A expressão $f''(x)+\dfrac{2}{x}f'(x)$ é equivalente a:

A $-\dfrac{f(x)}{x^3}$

B $\dfrac{f(x)}{x^3}$

C $-\dfrac{f(x)}{x^4}$

D $\dfrac{f(x)}{x^4}$

***13.2.** O gráfico de f tem um ponto tal que se adicionamos 1 à sua abcissa, o declive da recta tangente diminui 80%.

Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine as coordenadas desse ponto.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o(s) gráfico(s) que considerar necessário(s) para a resolução do problema;
- Assinale o ponto e a sua abcissa, arredondada às centésimas;
- apresentar as coordenadas do ponto, arredondadas às centésimas.

14. Sejam f e g as funções de domínio $\mathbb{R}$ tais que:

- f é afim e o seu gráfico intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa -1 e o intersecta o eixo Oy num ponto de ordenada positiva.

- $g(x) = e^{x^2 - x} \times f(x)$

Mostre que $f(0)$ é um mínimo relativo da função g .

***15.** Considere a função h , de domínio $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, definida por $h(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

Seja a um número real tal que $3 < a < 4$.

Sem utilizar a calculadora, nem mesmo em eventuais cálculos numéricos, mostre que a equação $h(x) = a$ tem uma única solução no intervalo $]e, e^4[$.

Sugestão: tenha em conta que $2 < e < 3$

F I M

As pontuações obtidas nas respostas a estes onze itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.1.	1.2.	3.	4.	6.	8.	10.1.	10.2.	13.1.	13.2.	15.	Subtotal
Cotação (em pontos)	12	14	12	14	12	12	14	14	12	14	14	144
Destes sete itens, contribuem para a classificação final da prova os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	2.	5.	7.	9.	11.	12.	15.					Subtotal
Cotação (em pontos)	4×14											56
TOTAL												200

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO

1.

1.1. Tem-se que (u_n) é uma progressão aritmética de razão positiva, pelo que $u_n \to +\infty$ e portanto:

$$\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\lim(u_n)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

A sucessão (v_n) é limitada, pois $-1 \leq \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \leq 1$, para todo o n natural.

Assim, como $\frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{u_n} \times v_n$, vem que $\lim\left(\frac{v_n}{u_n}\right) = \lim\left(\frac{1}{u_n} \times v_n\right) = 0$ (o limite do produto entre um infinitésimo, sucessão que tende para zero, e uma sucessão limitada é zero). Logo, a sucessão de termos geral $\frac{v_n}{u_n}$ é convergente o que implica que é limitada, concluindo-se que as afirmações das opções **A** e **C** são verdadeiras.

Logo, só a opção **B** pode ser a falsa, pois caso fosse verdadeira, então a sucessão de termo geral $\frac{n}{u_n} + v_n$ seria convergente e portanto também seria limitada, o que implicaria que todas afirmações eram verdadeiras.

Apesar de já sabermos qual é a resposta correcta, vamos provar que a afirmação de **D** é verdadeira e que a de **B** é falsa.

- (u_n) é uma progressão aritmética de razão positiva, pelo que sendo r a sua razão, com $r > 0$, vem que:

$$u_n = u_1 + (n-1)r = rn - r + u_1$$

Logo, $\lim \frac{n}{u_n} = \lim \frac{n}{rn - r + u_1} = \lim \frac{\cancel{n}}{r\cancel{n}} = \frac{1}{r}$, pelo que como $\frac{1}{r} \in \mathbb{R}$, vem que a sucessão de termo geral $\frac{n}{u_n}$ é convergente e portanto é limitada. Assim, como (v_n) é limitada e como a soma entre duas sucessões limitadas é ainda uma sucessão limitada, vem que a sucessão de termo geral $\frac{n}{u_n} + v_n$ e limitada, pelo que a afirmação da opção **D** é verdadeira.

▪ Já vimos que $\lim \frac{n}{u_n} = \frac{1}{r}$, sendo r a razão da progressão aritmética (u_n)

A sucessão (v_n) só toma três valores distintos, -1, 0 e 1, de facto:

$$v_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\,;\ v_2 = \cos(\pi) = -1\,;\ v_3 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0\,;\ v_4 = \cos(2\pi) = 1$$

$$v_5 = \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0\,;\ v_6 = \cos(3\pi) = -1\,;\ v_7 = \cos\left(\frac{7\pi}{2}\right) = 0\,;\ v_8 = \cos(4\pi) = 1$$

ou seja, os termos repetem-se de quatro em quatro (a sucessão é periódica de período fundamental 4). Assim:

▪ reparando nos termos de ordem ímpar, o seu valor é sempre 0, pelo que se n é ímpar, tem.se que:

$$\lim\left(\frac{n}{u_n} + v_n\right) = \lim \frac{n}{u_n} + \lim(v_n) = \frac{1}{r} + 0 = \frac{1}{r}$$

▪ reparando nos termos em que ordem é um múltiplo de 4, o seu valor é sempre 1, pelo que se n é um múltiplo de 4, tem-se que:

$$\lim\left(\frac{n}{u_n} + v_n\right) = \lim \frac{n}{u_n} + \lim(v_n) = \frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{r} + 1$$

Logo, como $\frac{1}{r} \neq \frac{1}{r} + 1$, vem que a sucessão de termos geral $\frac{n}{u_n} + v_n$ não tem limite e portanto não é convergente concluindo-se que a afirmação da opção **B** é falsa.

Resposta: B

1.2. Seja r a razão da progressão aritmética (u_n)

Tem-se que:

▪ $u_1 + u_2 + u_3 = 9 \underset{\substack{u_3 = u_1 + 2r \\ u_2 = u_1 + r}}{\Leftrightarrow} u_1 + u_1 + r + u_1 + 2r = 9 \Leftrightarrow 3u_1 + 3r = 9 \underset{\div 3}{\Leftrightarrow} u_1 + r = 3 \Leftrightarrow u_1 = 3 - r$

▪ $u_5 + u_{14} = 66 \underset{\substack{u_5 = u_1 + 4r \\ u_{14} = u_1 + 13r}}{\Leftrightarrow} u_1 + 4r + u_1 + 13r = 66 \Leftrightarrow 2u_1 + 17r = 66 \underset{u_1 = 3 - r}{\Leftrightarrow} 2(3 - r) + 17r = 66 \Leftrightarrow 6 - 2r + 17r = 66 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 15r = 60 \Leftrightarrow r = \frac{60}{15} \Leftrightarrow r = 4 \Rightarrow u_1 = 3 - 4 = -1$$

Assim, $u_n = u_1 + (n-1)r = -1 + (n-1) \times 4 = -1 + 4n - 4 = 4n - 5$, pelo que a soma dos cinquenta primeiros termos de (u_n) é igual a $u_1 + u_2 + \ldots + u_{50} = \dfrac{u_1 + u_{50}}{2} \times 50 = \dfrac{-1 + 4 \times 50 - 5}{2} \times 50 = 97 \times 50 = 4850$.

- sabemos que os termos da sucessão (v_n) se repetem de quatro em quatro: $v_1 = 0$, $v_2 = -1$, $v_3 = 0$ e $v_4 = 1$, repetindo-se este padrão. Assim, como $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0 - 1 + 0 + 1 = 0$, vem que:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = v_5 + v_6 + v_7 + v_8 = v_9 + v_{10} + v_{11} + v_{12} = \ldots = v_{45} + v_{46} + v_{47} + v_{48} = 0$$

Mas:

- $v_{49} = \cos\left(\dfrac{49\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{48\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(24\pi + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

- $v_{50} = \cos\left(\dfrac{50\pi}{2}\right) = \cos(25\pi) = \cos(\pi) = -1$

Pelo que a soma dos cinquenta primeiros termos da sucessão (v_n) é igual a:

$$\underbrace{\underbrace{v_1 + v_2 + v_3 + v_4}_{0} + \underbrace{v_5 + v_6 + v_7 + v_8}_{0} + \underbrace{v_9 + v_{10} + v_{11} + v_{12}}_{0} + \ldots + \underbrace{v_{45} + v_{46} + v_{47} + v_{48}}_{0}}_{0} + v_{49} + v_{50} = 0 + 0 - 1 = -1$$

∴ A soma dos cinquenta primeiros termos da sucessão (w_n), definida por $w_n = u_n + v_n$ é igual a:

$$w_1 + \ldots + w_{50} = \underbrace{u_1 + u_2 + \ldots + u_{50}}_{4850} + \underbrace{v_1 + v_2 + \ldots + v_{50}}_{-1} = 4850 - 1 = 4849$$

2. Se ${}^nC_{20}$ é o maior elemento da linha n, então é o elemento central dessa linha, pelo que antes dele estão vinte elementos, do ${}^nC_0$ ao ${}^nC_{19}$, e após estão outros vinte, do ${}^nC_{21}$ ao ${}^nC_{40}$:

$$\underbrace{{}^nC_0 \quad {}^nC_1 \quad {}^nC_2 \quad \ldots \quad {}^nC_{19}}_{20 \text{ elementos}} \quad \underset{\substack{\downarrow \\ \text{maior} \\ \text{elemento}}}{{}^nC_{20}} \quad \underbrace{{}^nC_{21} \quad \ldots \quad {}^nC_{38} \quad {}^nC_{39} \quad {}^nC_{40}}_{20 \text{ elementos}}$$

Portanto, a linha n é a linha 40 que tem 41 elementos, pelo que o número de casos possíveis é ${}^{41}C_3$.

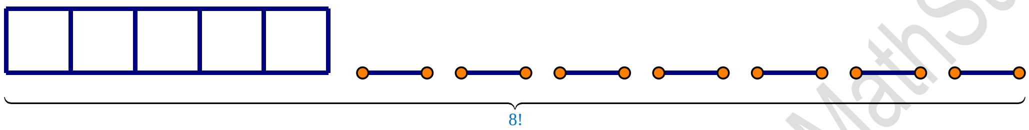
Assim, como $n = 40$, vem que ${}^{n-1}C_9 + {}^{n-1}C_{10} = {}^{39}C_9 + {}^{39}C_{10} = {}^{40}C_{10}$, pelo que o outro elemento da linha 40 com o mesmo valor do que ${}^{40}C_{10}$ é ${}^{40}C_{40-10} = {}^{40}C_{30}$:

$$\underbrace{{}^{40}C_0 \quad {}^{40}C_1 \quad \ldots \quad {}^{40}C_{10}}_{\substack{11 \text{ elementos com valor} \\ \text{inferior ou igual a } {}^{40}C_{10}}} \quad \underbrace{{}^{40}C_{11} \quad \ldots \quad {}^{40}C_{20} \quad \ldots \quad {}^{40}C_{29}}_{19 \text{ elementos com valor superior a } {}^{40}C_{10}} \quad \underbrace{{}^{40}C_{30} \quad \ldots \quad {}^{40}C_{39} \quad {}^{40}C_{40}}_{\substack{11 \text{ elementos com valor} \\ \text{inferior ou igual a } {}^{40}C_{10}}}$$

Portanto, para determinarmos o número de casos favoráveis escolhem-se dois elementos entre os 19 com valor superior a ${}^{40}C_{10}$ (representados a encarnado) e um elemento entre os 22 com valor inferior ou igual a ${}^{40}C_{10}$ (representados a azul), o número de maneiras de o fazer é ${}^{19}C_2 \times {}^{22}C_1$, ou escolhem-se três elementos entre os 19 com valor superior a ${}^{40}C_{10}$, o número de maneiras de o fazer é ${}^{19}C_3$.

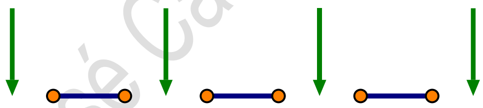
Assim, o número de casos favoráveis é ${}^{19}C_2 \times {}^{22}C_1 + {}^{19}C_3$ e a probabilidade pedida é $\dfrac{{}^{19}C_2 \times {}^{22}C_1 + {}^{19}C_3}{{}^{41}C_3} \approx 0,44$.

3. Vamos começar por agrupar a Ana, a Bruna, o Carlos, a Diana e o Ezequiel num bloco:



Assim, o bloco e os restantes sete amigos permutam entre si de $8!$ maneiras distintas (o bloco e os sete amigos é equivalente a termos oito amigos a permutarem entre si, o bloco conta como uma pessoa). Falta de quantas maneiras podemos distribuir Ana, a Bruna, o Carlos, a Diana e o Ezequiel dentro do bloco.

A Ana e a Bruna não podem ficar lado a lado, pelo que têm de ocupar posições entre os restantes três ou nas pontas, isto é, podem ocupar duas de quatro posições: as duas entre os restantes três mais as duas nas pontas. Essas possibilidades estão indicadas pelas setas na figura seguinte:



Logo, das quatro posições que a Ana e a Bruna podem ocupar escolhem-se duas, o número de maneiras de o fazer é ${}^{4}C_2$. Para cada uma destas maneiras a Ana e a Bruna permutam de $2!$ maneiras nas duas posições escolhidas e os restantes três amigos permutam de $3!$ nas suas posições. Portanto, dentro do bloco, os cinco amigos podem sentar-se de ${}^{4}C_2 \times 2! \times 3!$ maneiras distintas.

$\therefore$ Nas condições do enunciado, os cinco amigos podem sentar-se de ${}^{4}C_2 \times 2! \times 3! \times 8! = 2903040$ maneiras distintas.

Resposta: B

4. Sejam A e B os acontecimentos:

A: «a bola retirada é encarnada»

B: «a bola retirada está numerada com um número par»

Do enunciado, tem-se:

- 30% das bolas são encarnadas, ou seja, $P(A)=\frac{3}{10}\Leftrightarrow P(\overline{A})=0,7$

- entre todas as bolas encarnadas, 5 em cada 12 estão numeradas com números pares, isto é, $P(B|A)=\frac{5}{12}$.

Portanto, $P(B|A)=\frac{5}{12}\Leftrightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{5}{12}\underset{P(A)=0,3}{\Leftrightarrow}P(A\cap B)=\frac{5}{12}\times 0,3\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{8}$

- $52,5\%$ das bolas são pretas e estão numeradas com um número par, ou seja, $P(\overline{A}\cap B)=0,525$

Portanto, $\underbrace{P(\overline{A}\cap B)}_{P(B)-P(A\cap B)}=0,525\underset{\substack{0,525=\frac{21}{40}\\ P(A\cap B)=\frac{1}{8}}}{\Leftrightarrow}P(B)-\frac{1}{8}=\frac{21}{40}\Leftrightarrow P(B)=\frac{21}{40}+\frac{1}{8}\Leftrightarrow P(B)=\frac{13}{20}$

A probabilidade de a bola retirada ser encarnada, sabendo que está numerada com número par é dada por $P(A|B)$.

Portanto, a probabilidade pedida é $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{13}{20}}=\frac{20}{8\times 13}=\frac{\cancel{4}\times 5}{2\times\cancel{4}\times 13}=\frac{5}{26}$.

5. A função g é contínua em $[-1,+\infty[$, pelo que é contínua em $x=k$ e portanto $\lim_{x\to k^-}g(x)=\lim_{x\to k^+}g(x)=g(k)$.

Assim:

- $\lim_{x\to k^+}g(x)=\lim_{x\to k^+}x=k$

- $g(k)=k$

- $$\lim_{x\to k^-} g(x) = \lim_{x\to k^-} \frac{x e^{x-k}-k}{\text{sen}(k-x)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to k^-}\frac{\frac{xe^{x-k}-k}{x-k}}{\frac{\text{sen}(k-x)}{x-k}} = \frac{\lim\limits_{x\to k^-}\frac{xe^{x-k}-k}{x-k}}{\lim\limits_{x\to k^-}\frac{\text{sen}(k-x)}{x-k}} \underset{\substack{y=x-k\Leftrightarrow x=y+k\\ \textit{Logo, } k-x=-(x-k)=-y\\ x\to k^-\Rightarrow y\to 0^-}}{=} \frac{\lim\limits_{y\to0^-}\frac{(y+k)e^y-k}{y}}{\lim\limits_{y\to0^-}\frac{\text{sen}(-y)}{y}} =$$

$$\underset{\substack{\text{sen}(-y)=-\text{sen}\,y\\ \textit{A função seno}\\ \textit{é ímpar}}}{=} \frac{\lim\limits_{y\to0^-}\frac{ye^y+ke^y-k}{y}}{-\underbrace{\lim\limits_{y\to0^-}\frac{\text{sen}\,y}{y}}_{\textit{Limite notável}}} = \frac{\lim\limits_{y\to0^-}\frac{\cancel{y}e^y}{\cancel{y}} + \lim\limits_{y\to0^-}\frac{k(e^y-1)}{y}}{-1} = -e^0 - k\times \underbrace{\lim_{y\to0^-}\frac{e^y-1}{y}}_{\textit{Limite notável}} = -1-k\times1 = -1-k$$

Logo, $-1-k=k \Leftrightarrow -1=2k \Leftrightarrow k=-\frac{1}{2}$.

6. Seja $z=x+yi$, com $x,y\in\mathbb{R}$

Tem-se que $(z+\bar{z})^2-(z-\bar{z})^2=16 \Leftrightarrow \left(x+\cancel{yi}+x-\cancel{yi}\right)^2-\left(x+yi-(x-yi)\right)^2=16 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (2x)^2-\left(\cancel{x}+yi-\cancel{x}+yi\right)^2=16 \Leftrightarrow 4x^2-(2yi)^2=16$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-4y^2i^2=16 \underset{i^2=-1}{\Leftrightarrow} 4x^2+4y^2=16 \underset{\div 4}{\Leftrightarrow} x^2+y^2=4$$

Logo, a condição $(z+\bar{z})^2-(z-\bar{z})^2=16$ define uma circunferência de raio $\sqrt{4}=2$ centrada na origem.

Resposta: B

7. O afixo do número complexo $\frac{(z_3)^3\times z_2}{z_1}$ pertence à bissectriz dos quadrantes pares se os seus argumentos forem da forma $-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

Tem-se que $z_1=(i-3)i^{37}=(i-3)i^{36}\times i=(i-3)\times1\times i=i^2-3i=-1-3i=-(1+3i)$

Logo:

$$\frac{(z_3)^3\times z_2}{z_1}=(z_3)^3\times\frac{1}{z_1}\times z_2=\left(e^{i\alpha}\right)^3\times\frac{1}{-\cancel{(1+3i)}}\times\frac{\cancel{1+3i}}{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}=\frac{e^{i(3\alpha)}}{-\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}=\frac{e^{i(3\alpha)}}{\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)}}=\frac{e^{i(3\alpha)}}{\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(3\alpha-\frac{5\pi}{4}\right)}$$

Portanto:

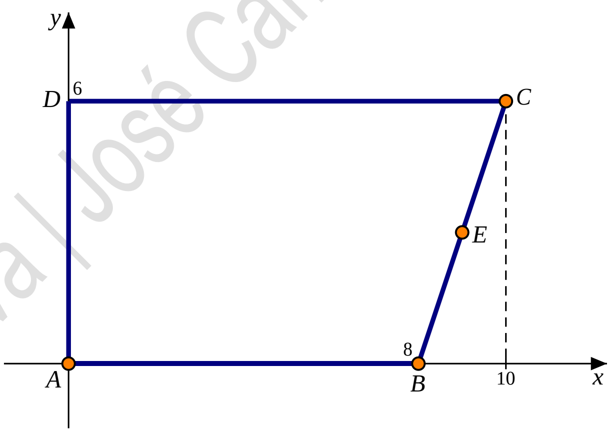
$$3\alpha-\frac{5\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 3\alpha=-\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 3\alpha=\pi+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi+k\pi}{3}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

Assim:

- $k=0\rightarrow\alpha=\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{3}\notin\left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$
- $k=1\rightarrow\alpha=\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}\notin\left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$
- $k=2\rightarrow\alpha=\pi$ e $\pi\notin\left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$
- $k=3\rightarrow\alpha=\frac{4\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}\notin\left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$
- $k=4\rightarrow\alpha=\frac{5\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}\in\left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$
- $k=5\rightarrow\alpha=2\pi$ e $2\pi\notin\left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$

$\therefore\ \alpha=\frac{5\pi}{3}$

8. Representando um trapézio num referencial o.n. xOy, em que A coincide com a origem do referencial, B pertence ao eixo Ox e D ao eixo Oy, tem-se:



Logo, $A(0,0)$, $B(8,0)$, $C(10,6)$, $D(0,6)$ e as coordenadas do ponto E, ponto médio de $[BC]$, são:

$$E\left(\frac{8+10}{2},\frac{0+6}{2}\right)\text{ ou seja, } E(9,3)$$

Portanto, $\overrightarrow{AE}=E-A=(9,3)-(0,0)=(9,3)$ e $\overrightarrow{BD}=D-B=(0,6)-(8,0)=(-8,6)$, pelo que:

$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=(9,3)\cdot(-8,6)=-72+18=-54$$

Resposta: D

9. Tem-se que:

$$D=\{x\in\mathbb{R}: x+3>0 \ \wedge \ 6-2x>0 \ \wedge \ x>0\}=\{x\in\mathbb{R}: x>-2 \ \wedge \ x<3 \ \wedge \ x>0\}=\left]0,3\right[$$

Neste domínio, tem-se:

$$\log_4(x+3)\geq\log_4(6-2x)-\log_2\left(\sqrt{x}\right)\Leftrightarrow\log_4(x+3)\geq\log_4(6-2x)-\log_2\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\Leftrightarrow$$

$$\underset{x>0}{\Leftrightarrow}\log_4(x+3)\geq\log_4(6-2x)-\frac{1}{2}\log_2 x$$

$$\underset{x>0}{\Leftrightarrow}\log_4(x+3)\geq\log_4(6-2x)-\cancel{\frac{1}{2}}\times\frac{\log_4 x}{\cancel{\log_4 2}}$$

$$\boxed{i)\ \log_4 2=\frac{\log_2 2}{\log_2 4}=\frac{1}{\log_2 2^2}=\frac{1}{2}}$$

$$\underset{i)}{\Leftrightarrow}\log_4(x+3)\geq\log_4(6-2x)-\log_4 x$$

$$\Leftrightarrow\log_4(x+3)+\log_4 x\geq\log_4(6-2x)$$

$$\Leftrightarrow\log_4\left(x(x+3)\right)\geq\log_4(6-2x)$$

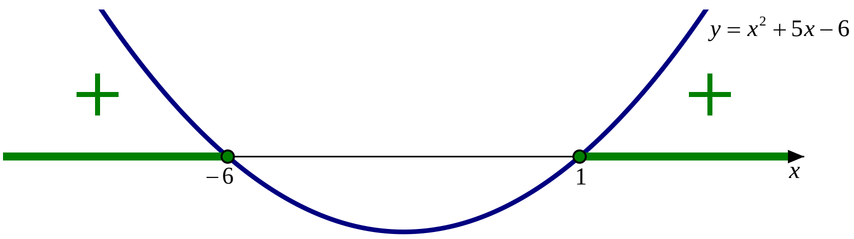
$$\Leftrightarrow x(x+3)\geq 6-2x \ \wedge \ x\in D$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x-6+2x\geq 0 \ \wedge \ x\in D$$

$$\Leftrightarrow x^2+5x-6\geq 0 \ \wedge \ x\in D$$

Cálculo auxiliar: $x^2+5x-6=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times1\times(-6)}}{2\times1}\Leftrightarrow x=-6 \ \vee \ x=1$

O gráfico da função $y=x^2+5x-6$ é uma parábola com a concavidade voltada para cima:



Logo, $x^2+5x-6\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -6 \quad \vee \quad x\geq 1$, pelo que o conjunto solução da inequação dada é:

$$\left(\left]-\infty,-6\right]\cup\left[1,+\infty\right[\right)\cap\left]0,3\right[=\left[1,3\right[$$

10.

10.1. A amplitude do ângulo ABC é igual à amplitude do ângulo entre os vectores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$.

Tem-se que:

- $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=(8,-5,6)$

- o ponto B pertence ao eixo Ox, pelo que as suas coordenadas são da forma $B(x_B,0,0)$. Como o ponto B pertence ao plano BCD, vem que:

$$3x_B-2\times 0+4\times 0-12=0 \Leftrightarrow 3x_B=12 \Leftrightarrow x_B=4 \Rightarrow B(4,0,0)$$

- o ponto C pertence ao eixo Oy, pelo que as suas coordenadas são da forma $C(0,y_C,0)$. Como o ponto C pertence ao plano BCD, vem que:

$$3\times 0-2y_C+4\times 0-12=0 \Leftrightarrow -2y_C=12 \Leftrightarrow y_C=-6 \Rightarrow C(0,-6,0)$$

Portanto, $\overrightarrow{BC}=C-B=(0,-6,0)-(4,0,0)=(-4,-6,0)$.

Assim:

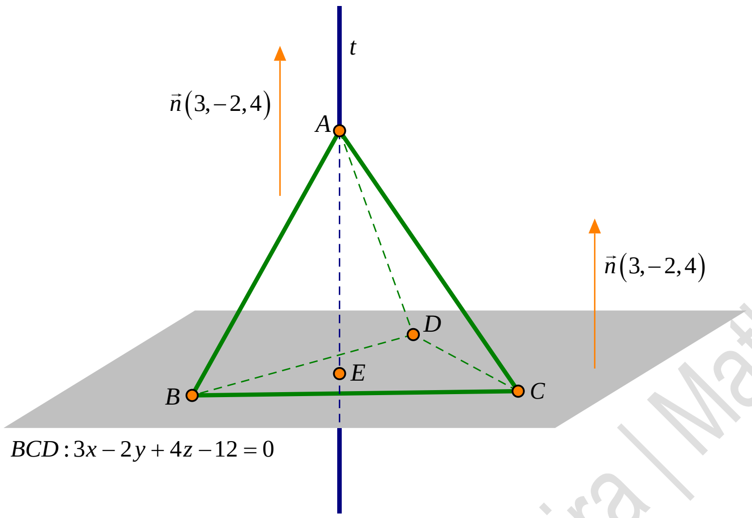
$$\cos\left(A\hat{B}C\right)=\cos\left(\overrightarrow{BA}\,\hat{}\,\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}=\frac{(8,-5,6)\cdot(-4,-6,0)}{\sqrt{8^2+(-5)^2+6^2}\times\sqrt{(-4)^2+(-6)^2+0^2}}=$$

$$=\frac{-32+30+0}{\sqrt{125}\times\sqrt{52}}=\frac{-\cancel{2}}{5\sqrt{5}\times\cancel{2}\sqrt{13}}=-\frac{1}{5\sqrt{5\times 13}}$$

$$\therefore\ A\hat{B}C=\cos^{-1}\left(-\frac{1}{5\sqrt{65}}\right)\approx 91^{\circ}$$

10.2. Seja t a recta perpendicular ao plano BCD, que contém a face $[BCD]$, que passa no ponto A.

Consideremos a seguinte figura (figura ilustrativa):



A recta t intersecta o plano BCD num ponto E, tal que $\overline{AE}$ é a medida da altura da pirâmide em relação à face $[BCD]$.

Assim, como a recta t é perpendicular ao plano BCD, um vector director da recta t é $\vec{n}(3,-2,4)$. As coordenadas do ponto A são dadas por $A = B + \overrightarrow{BA} = B - \overrightarrow{AB} = (4,0,0) - (-8,5,-6) = (12,-5,6)$.

Portanto, $t:(x,y,z) = (12,-5,6) + k(3,-2,4)$, $k \in \mathbb{R}$, pelo que um ponto genérico da recta t é:

$$(12+3k,-5-2k,6+4k),\ k \in \mathbb{R}$$

Substituindo na equação do plano BCD, vem:

$$3(12+3k) - 2(-5-2k) + 4(6+4k) - 12 = 0 \Leftrightarrow 36 + 9k + 10 + 4k + 24 + 16k - 12 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 29k + 58 = 0 \Leftrightarrow 29k = -58 \Leftrightarrow k = -2$$

Então as coordenadas do ponto E são $E(12+3\times(-2),-5-2\times(-2),6+4\times(-2))$, ou seja, $E(6,-1,-2)$.

$\therefore$ A medida da altura da pirâmide em relação à face $[BCD]$ é:

$$\overline{AE} = \sqrt{(12-6)^2 + (-5+1)^2 + (6+2)^2} = \sqrt{36+16+64} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$$

11. Tem-se que:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{\frac{k}{3}+1}=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)^{\frac{k}{3}+1}$

Assim, como:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(4+\frac{x^3\ln x}{e^x}\right)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}4+\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\ln x}{e^x}=4+\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\cancel{x^3}\ln x}{\cancel{x^4}}}{\frac{e^x}{x^4}}=4+\frac{\overbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}^{\text{Limite notável}}}{\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^4}}_{\text{Limite notável}}}=4+\frac{0}{+\infty}=4+0=4$$

vem que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{\frac{k}{3}+1}=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)^{\frac{k}{3}+1}=4^{\frac{k}{3}+1}$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(\ln(x+8)-\ln x\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}+\frac{8}{x}\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{8}{x}\right)^x=$

$$\underset{y=\ln x\text{ é contínua}}{=}\ln\left(\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{8}{x}\right)^x}_{\text{Limite notável}}\right)=\ln\left(e^8\right)=8$$

Outra maneira: $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{8}{x}\right)\right)$

Fazendo $y=\ln\left(1+\frac{8}{x}\right)\Leftrightarrow e^y=1+\frac{8}{x}\Leftrightarrow e^y-1=\frac{8}{x}\Leftrightarrow\frac{x}{8}=\frac{1}{e^y-1}\Leftrightarrow x=\frac{8}{e^y-1}$. Se $x\to+\infty$, então $y=\ln\left(1+\frac{8}{x}\right)\to\ln\left(1+\frac{8}{+\infty}\right)=0$.

Assim, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{8}{x}\right)\right)=\lim\limits_{y\to0}\left(\frac{8}{e^y-1}\times y\right)=8\times\lim\limits_{y\to0}\frac{y}{e^y-1}=8\times\frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{y\to0}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{Limite notável}}}=8\times\frac{1}{1}=8$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{\frac{k}{3}+1}>\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\Leftrightarrow4^{\frac{k}{3}+1}>8\Leftrightarrow\left(2^2\right)^{\frac{k}{3}+1}>2^3\Leftrightarrow2^{\frac{2k}{3}+2}>2^3\Leftrightarrow\frac{2k}{3}+2>3\Leftrightarrow$

$$\underset{\times3}{\Leftrightarrow}2k+6>9\Leftrightarrow2k>3\Leftrightarrow k>\frac{3}{2}$$

$\therefore\ k\in\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$

12. Tem-se que:

- a função f é contínua em $[0,+\infty[$ por ser o quociente e a composição entre funções contínuas no seu domínio (funções polinomiais e a função g, contínua por hipótese e sem zeros, o que implica que que $y=g(-x)$ também não tem zeros).

Logo, o gráfico de f não tem assimptotas verticais.

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(g(x)-2x\right)=-2$

Então, a recta de equação $y=2x-2$ é assimptota oblíqua do gráfico de g, quando $x\to-\infty$, pelo que:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=2 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}(2x-2)=-\infty$$

Como gráfico de f tem uma assimptota oblíqua de declive $\frac{1}{2}$, vem que a ordenada na origem é dada por:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-x^2}{g(-x)}-\frac{1}{2}x\right)\underset{\substack{y=-x\Leftrightarrow x=-y\\ x\to+\infty\Rightarrow y\to-\infty}}{=}\lim_{y\to-\infty}\left(\frac{1-(-y)^2}{g(y)}+\frac{y}{2}\right)=\lim_{y\to-\infty}\left(\frac{1}{g(y)}-\frac{y^2}{g(y)}+\frac{y}{2}\right)=$$

$$=\lim_{y\to-\infty}\frac{1}{g(y)}+\lim_{y\to-\infty}\left(-\frac{y^2}{g(y)}+\frac{y}{2}\right)=\frac{1}{\lim\limits_{y\to-\infty}g(y)}+\lim_{y\to-\infty}\frac{-2y^2+yg(y)}{2g(y)}$$

$$=\frac{1}{-\infty}+\frac{1}{2}\times\lim_{y\to-\infty}\frac{y\left(g(y)-2y\right)}{g(y)}=0+\frac{1}{2}\times\lim_{y\to-\infty}\frac{y}{g(y)}\times\lim_{y\to-\infty}\left(g(y)-2y\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\lim\limits_{y\to-\infty}\frac{g(y)}{y}}\times(-2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cancel{2}}\times\left(-\cancel{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

Logo, a recta de equação $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ é a única assimptota do gráfico de f.

13.

13.1. Tem-se que:

- $$f'(x)=\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=-\left(\frac{1}{x}\right)^2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\underset{i)}{=}-\left(-\frac{1}{x^2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

- $$f''(x)=\left(\frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=\left(\frac{1}{x^2}\right)'\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)'=$$

$$\underset{ii)}{=}-\frac{2}{x^3}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}\times\left(\frac{1}{x}\right)'\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\frac{2}{x^3}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}\times\left(-\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{2}{x^3}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^4}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$i)\ \left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1'\times x-1\times x'}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$$

$$ii)\ \left(\frac{1}{x^2}\right)'=\frac{1'\times x^2-1\times\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2}=$$

$$=-\frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}3}}=-\frac{2}{x^3}$$

Logo:

$$f''(x)+\frac{2}{x}f'(x)=-\frac{2}{x^3}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^4}\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{2}{x}\times\frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)=\cancel{-\frac{2}{x^3}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}-\frac{1}{x^4}\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\cancel{\frac{2}{x^3}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}=$$

$$=-\frac{1}{x^4}\cos\left(\frac{1}{x}\right)=-\frac{\overbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}^{f(x)}}{x^4}=-\frac{f(x)}{x^4}$$

Resposta: C

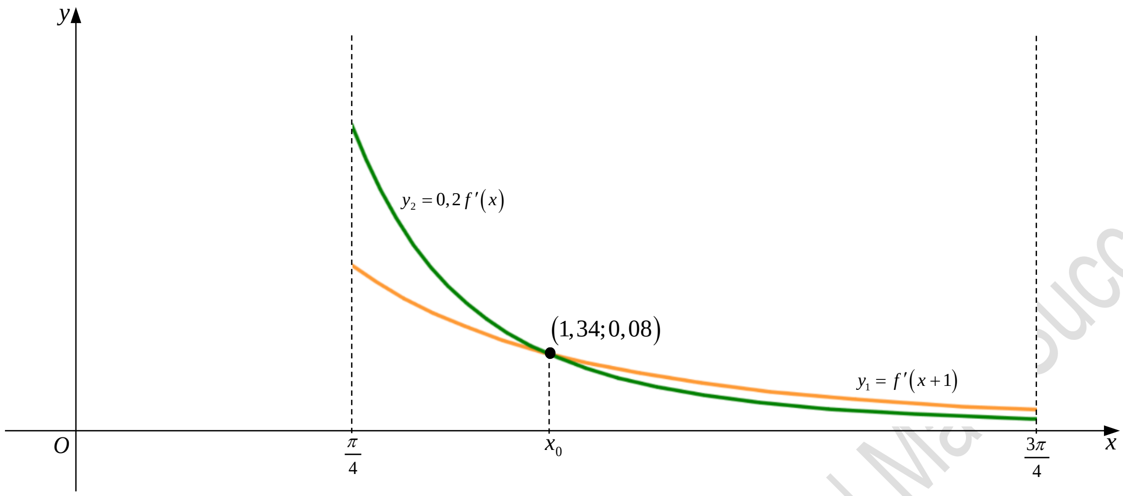
13.2. Seja P, de coordenadas $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$, o ponto pedido.

Neste ponto o declive da recta tangente ao gráfico de f é dado por $f'\left(x_0\right)$. Quando adicionamos 1 à abcissa deste ponto obtemos um novo ponto Q, de coordenadas $\left(x_0+1, f\left(x_0+1\right)\right)$. Neste novo ponto, o declive da recta tangente é dado por $f'\left(x_0+1\right)$ e que diminuiu 80% em relação ao declive da recta tangente ao gráfico de f no ponto P, isto é, em relação a $f'\left(x_0\right)$. Por outras palavras, $f'\left(x_0+1\right)$ é igual a $f'\left(x_0\right)$ menos 80% de $f'\left(x_0\right)$, que pode ser traduzido por:

$$f'\left(x_0+1\right)=f'\left(x_0\right)-0{,}8f'\left(x_0\right)\Leftrightarrow f'\left(x_0+1\right)=0{,}2f'\left(x_0\right)$$

Portanto, pretende-se determinar $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ tal que $f'(x+1)=0{,}2f'(x)$.

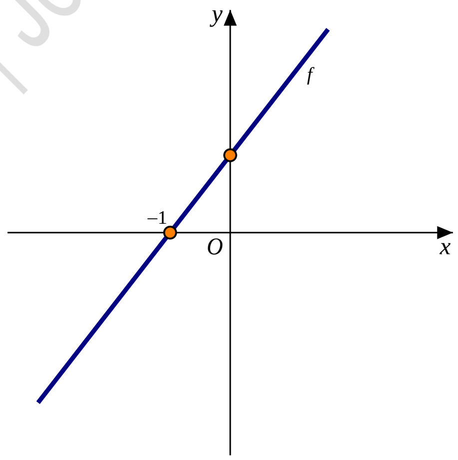
Utilizando o editor de funções da calculadora, define-se $y_1 = f'(x+1)$ e $y_2 = 0,2\,f'(x)$, no intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$:



Então, $f'(x+1) = 0,2\,f'(x) \Leftrightarrow x = x_0$, pelo que as coordenadas do ponto P são $(x_0, f(x_0))$, em que $x_0 \approx 1,34$ e

$$f(x_0) = \cos\left(\frac{1}{x_0}\right) \approx \cos\left(\frac{1}{1,34}\right) \approx 0,73\,.$$

14. A função f é afim, pelo que a sua expressão é da forma $f(x) = mx + b$, com $m, b \in \mathbb{R}$. Como o gráfico de f intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa -1 e o eixo Oy num ponto de ordenada positiva, vem que f é crescente, pelo que $m > 0$, como se ilustra na figura seguinte:



Mas $f(-1) = 0$, pelo que $f(-1) = 0 \Leftrightarrow -m + b = 0 \Leftrightarrow b = m$ e portanto $f(x) = mx + m$, com $m > 0$.

Assim, $g(x) = e^{x^2 - x} \times f(x) = e^{x^2 - x} \times (mx + m) = m e^{x^2 - x}(x+1)$

Portanto:

- $g'(x)=\left(me^{x^2-x}(x+1)\right)'=m\left(e^{x^2-x}(x+1)\right)=m\left(\left(e^{x^2-x}\right)'(x+1)+e^{x^2-x}(x+1)'\right)=$

$$=m\left(\left(x^2-x\right)'e^{x^2-x}(x+1)+e^{x^2-x}\times 1\right)=m\left((2x-1)e^{x^2-x}(x+1)+e^{x^2-x}\right)$$

$$=m\left(e^{x^2-x}\left((2x-1)(x+1)+1\right)\right)=me^{x^2-x}\left(2x^2+2x-x-\cancel{1}+\cancel{1}\right)=me^{x^2-x}\left(2x^2+x\right)$$

- $g'(x)=0\Leftrightarrow me^{x^2-x}\left(2x^2+x\right)=0\Leftrightarrow \underbrace{me^{x^2-x}=0}_{Eq.\ Impossível\ em\ \mathbb{R}} \ \vee\ 2x^2+x=0\Leftrightarrow x(2x+1)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=0\ \vee\ 2x+1=0\Leftrightarrow x=0\ \vee\ x=-\frac{1}{2}$$

Elaborando um quadro de sinal de g' e relacionando com a monotonia de g, vem:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		0	$+\infty$
me^{x^2-x}	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$2x^2+x$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
g	$\nearrow$	máx.	$\searrow$	mín.	$\nearrow$

Logo, a função g tem mínimo relativo em $x=0$ que é $g(0)=e^{0^2-0}\times f(0)=e^0\times f(0)=1\times f(0)=f(0)$.

$\therefore$ $f(0)$ é mínimo relativo da função g.

15. A função h é contínua em $\mathbb{R}^+$, por ser o quociente entre funções contínuas no seu domínio (funções polinomiais e logarítmicas), pelo que h é contínua em $\left[e,e^4\right]\subset\mathbb{R}^+$.

Tem-se que:

- $h(e)=\dfrac{e}{\ln e}=\dfrac{e}{1}=e$

Como $e<3$ e $3<a$, vem que $e<a$, pelo que $h(e)<a$.

- $h\left(e^4\right)=\dfrac{e^4}{\ln\left(e^4\right)}=\dfrac{e^4}{4}$

Como $e>2$, vem que $e>2 \Leftrightarrow e^4>2^4 \Leftrightarrow \dfrac{e^4}{4}>\dfrac{2^4}{4} \Leftrightarrow \dfrac{e^4}{4}>4$. Assim, como $4>a$, tem-se que:

$$\frac{e^4}{4}>a \Leftrightarrow h\left(e^4\right)>a$$

Portanto, $h(e)<a<h\left(e^4\right)$, pelo que, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe pelo menos um $c\in\left]e,e^4\right[$ tal que $h(c)=a$, ou seja, a equação $h(x)=a$ é possível em $\left]e,e^4\right[$.

Falta verificar que a solução da equação que já garantimos existir é única. Para tal vamos usar a derivada de h e mostrar que é positiva no intervalo $\left]e,e^4\right[$. Assim:

$$h'(x)=\left(\frac{x}{\ln x}\right)'=\frac{x'\ln x-x(\ln x)'}{\ln^2 x}=\frac{1\times\ln x-\cancel{x}\times\frac{1}{\cancel{x}}}{\ln^2 x}=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}$$

Então, $h'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}>0 \underset{\ln^2 x>0,\ \forall x\in\mathbb{R}^+\backslash\{0\}}{\Leftrightarrow} \ln x-1>0 \Leftrightarrow \ln x>1 \underset{1=\ln e}{\Leftrightarrow} \ln x>\ln e \Leftrightarrow x>e$.

Logo, $h'(x)>0$ para todo o $x>e$, pelo que a função h é crescente em $\left[e,+\infty\right[$ o que implica que h é crescente em $\left]e,e^4\right[$ concluindo-se então que a equação dada tem uma única solução neste intervalo.

F I M