**EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO | MATEMÁTICA A**

**EXAME MODELO 10**

Todos os materiais do MathSuccess são escritos utilizando a ortografia anterior ao Acordo Ortográfico de 1990

**Site:** http://www.mathsuccess.pt

**Facebook:** https://www.facebook.com/MathSuccess

# EXAME MODELO N.º 10

# JULHO DE 2021

• Itens cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final:

**1.1.**, **1.2.**, **3.**, **4.**, **6.**, **8.**, **10.1.**, **10.2.**, **13.1.**, **13.2.** e **15.**

Estes itens estão assinalados no enunciado com uma caixa sombreada e um asterisco ao lado do número do item

• Dos restantes sete itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os quatro itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

**1.** Considere as sucessões $(u_n)$ e $(v_n)$ tais que:

- a sucessão $(u_n)$ é uma progressão aritmética de termos não nulos e razão positiva;
- a sucessão $(v_n)$ é definida por $v_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

***1.1.** Qual das seguintes afirmações é falsa?

**A** a sucessão de termo geral $\frac{v_n}{u_n}$ é convergente.

**B** a sucessão de termo geral $\frac{n}{u_n} + v_n$ é convergente.

**C** a sucessão de termo geral $\frac{v_n}{u_n}$ é limitada.

**D** a sucessão de termo geral $\frac{n}{u_n} + v_n$ é limitada.

***1.2.** Considere agora que a soma dos três primeiros termos de $(u_n)$ é $9$ e que $u_5 + u_{14} = 66$.

Seja $(w_n)$ a sucessão definida por $w_n = u_n + v_n$.

Qual é a soma dos cinquenta primeiros termos de $(w_n)$?

**2.** Considere uma certa linha $n$ do triângulo de Pascal tal que ${}^nC_{20}$ é o maior elemento dessa linha.

Escolhendo, simultaneamente e ao acaso, três elementos desta linha, qual é a probabilidade de pelo menos dois terem valor superior ao valor de ${}^{n-1}C_9 + {}^{n-1}C_{10}$?

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondada às centésimas.

***3.** Doze amigos, entre os quais a Ana, a Bruna, o Carlos, a Diana e o Ezequiel vão ver um jogo de futebol.

Os doze sentam-se em lugares consecutivos de uma mesma fila com doze lugares.

De quantas maneiras se podem sentar, de modo que a Ana, a Bruna, o Carlos, a Diana e o Ezequiel fiquem em posições consecutivas, mas que a Ana e a Bruna não fiquem lado a lado?

**A** $483840$

**B** $2903040$

**C** $4838400$

**D** $479001600$

***4.** Uma caixa contém bolas encarnadas e pretas, todas numeradas. Sabe-se que:

- $\frac{3}{10}$ das bolas são encarnadas;
- entre todas as bolas encarnadas, $5$ em cada $12$ estão numeradas com um número par;
- $52,5\%$ das bolas são pretas e estão numeradas com um número par.

Retira-se, ao acaso, uma bola da caixa.

Qual é a probabilidade de essa bola ser encarnada, sabendo que está numerada com número par?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

**5.** Para um certo valor real de $k > -1$, a função $g$, de domínio $[-1, +\infty[$, é contínua:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x e^{x-k} - k}{\operatorname{sen}(k - x)} & \text{se} \quad -1 \leq x < k \\ x & \text{se} \quad x \geq k \end{cases}$$

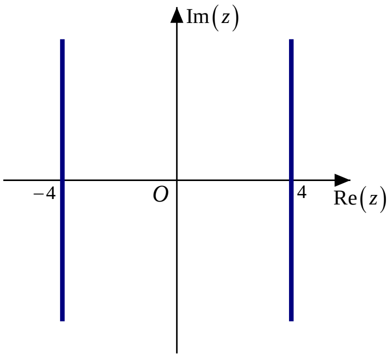
Qual é o valor de $k$ ?

***6.** Em $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, considere a condição:

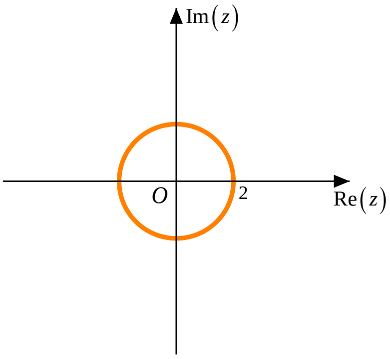
$$\left(z+\overline{z}\right)^2-\left(z-\overline{z}\right)^2=16$$

Em qual das figuras pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição?

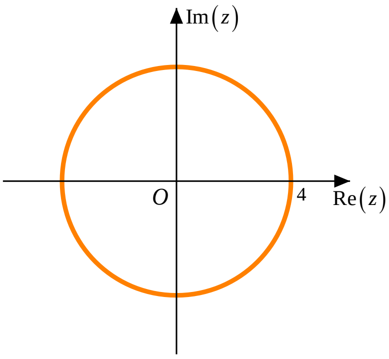
**A**



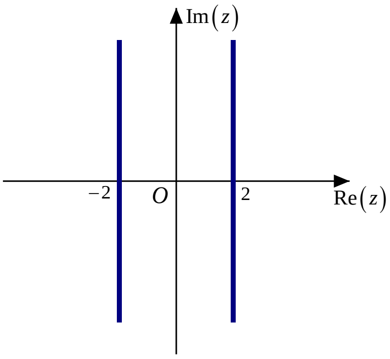

**B**




**C**




**D**

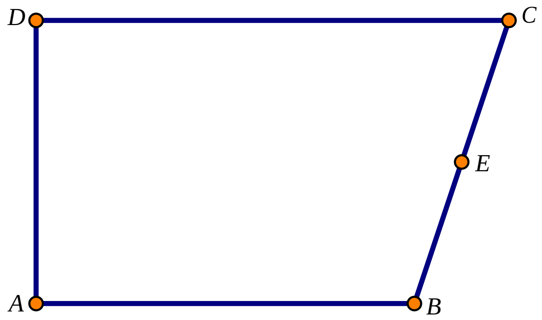



**7.** Em $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, considere:

$$z_1=\left(i-3\right)i^{37}\text{ , } z_2=\frac{1+3i}{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}\text{ e } z_3=e^{i\alpha}\text{ , com } \alpha\in\left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$$

Determine $\alpha$ de modo que a imagem geométrica do número complexo $\dfrac{\left(z_3\right)^3\times z_2}{z_1}$ pertença à bissectriz dos quadrantes pares.

***8.** Na figura está representado o trapézio rectângulo $[ABCD]$.




Sabe-se que:

- $E$ é o ponto médio do lado $[BC]$
- $\overline{AB}=8$
- $\overline{AD}=6$
- $\overline{CD}=10$

Qual é o valor de $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}$?

**A** $-48$

**B** $-50$

**C** $-52$

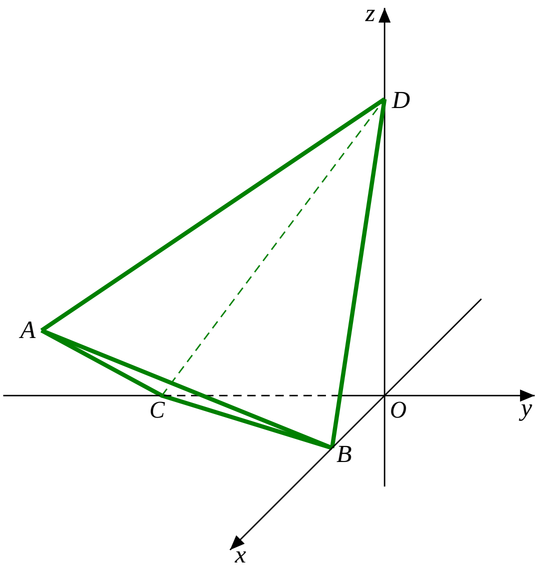
**D** $-54$

**9.** Determine, em $\mathbb{R}$, o conjunto solução da inequação:

$$\log_4(x+3)\geq\log_4(6-2x)-\log_2\left(\sqrt{x}\right)$$

Apresente o resultado na forma de intervalo ou reunião de intervalos.

**10.** Na figura está representada em referencial o.n. $Oxyz$ a pirâmide $[ABCD]$.




Sabe-se que:

- os pontos $B$, $C$ e $D$, pertencem, respectivamente, aos eixos $Ox$, $Oy$ e $Oz$
- uma equação do plano $BCD$ é $3x-2y+4z-12=0$
- $\overrightarrow{AB}(-8,5,-6)$

***10.1.** Determine a amplitude do ângulo $ABC$.

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

***10.2.** Determine a altura da pirâmide em relação à face $[BCD]$.

**11.** Sejam $f$ e $g$ as funções de domínio $\mathbb{R}^+$ definidas por

- $f(x)=4+\dfrac{x^3\ln x}{e^x}$
- $g(x)=x\left(\ln(x+8)-\ln x\right)$

Quais são os valores reais de $k$ de modo que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{\frac{k}{3}+1} > \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$?

Apresente o resultado na forma de intervalo de números reais.

**12.** Seja $g$ uma função contínua em $\mathbb{R}$, sem zeros, tal que:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(g(x) - 2x\right) = -2$$

Considere a função $f$, de domínio $[0, +\infty[$, definida por $f(x) = \frac{1-x^2}{g(-x)}$.

O gráfico de $f$ tem uma assimptota oblíqua de declive $\frac{1}{2}$.

Mostre que essa é a sua única assimptota e escreva a sua equação reduzida.

**13.** Considere a função $f$, de domínio $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, definida por $f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$.

***13.1.** A expressão $f''(x) + \frac{2}{x} f'(x)$ é equivalente a:

**A** $-\frac{f(x)}{x^3}$

**B** $\frac{f(x)}{x^3}$

**C** $-\frac{f(x)}{x^4}$

**D** $\frac{f(x)}{x^4}$

***13.2.** O gráfico de $f$ tem um ponto tal que se adicionamos $1$ à sua abcissa, o declive da recta tangente diminui $80\%$.

Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora, determine as coordenadas desse ponto.

Na sua resposta deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir o(s) gráfico(s) que considerar necessário(s) para a resolução do problema;
- Assinale o ponto e a sua abcissa, arredondada às centésimas;
- apresentar as coordenadas do ponto, arredondadas às centésimas.

**14.** Sejam $f$ e $g$ as funções de domínio $\mathbb{R}$ tais que:

- $f$ é afim e o seu gráfico intersecta o eixo $Ox$ no ponto de abcissa $-1$ e o intersecta o eixo $Oy$ num ponto de ordenada positiva.
- $g(x) = e^{x^2 - x} \times f(x)$

Mostre que $f(0)$ é um mínimo relativo da função $g$ .

***15.** Considere a função $h$ , de domínio $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ , definida por $h(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ .

Seja $a$ um número real tal que $3 < a < 4$ .

Sem utilizar a calculadora, nem mesmo em eventuais cálculos numéricos, mostre que a equação $h(x) = a$ tem uma única solução no intervalo $\left]e, e^4\right[$ .

**Sugestão:** tenha em conta que $2 < e < 3$

# F I M

| As pontuações obtidas nas respostas a estes onze itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final. | 1.1. | 1.2. | 3. | 4. | 6. | 8. | 10.1. | 10.2. | 13.1. | 13.2. | 15. | Subtotal |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Cotação (em pontos)** | 12 | 14 | 12 | 14 | 12 | 12 | 14 | 14 | 12 | 14 | 14 | 144 |
| Destes sete itens, contribuem para a classificação final da prova os 4 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação. | 2. | 5. | 7. | 9. | 11. | 12. | 15. | | | | | Subtotal |
| **Cotação (em pontos)** | $4\times14$ | | | | | | | | | | | 56 |
| **TOTAL** | | | | | | | | | | | | 200 |

# Proposta de Resolução

**1.**

**1.1.** Tem-se que $(u_n)$ é uma progressão aritmética de razão positiva, pelo que $u_n \to +\infty$ e portanto:

$$\lim \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\lim(u_n)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

A sucessão $(v_n)$ é limitada, pois $-1 \leq \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \leq 1$, para todo o $n$ natural.

Assim, como $\frac{v_n}{u_n} = \frac{1}{u_n} \times v_n$, vem que $\lim\left(\frac{v_n}{u_n}\right) = \lim\left(\frac{1}{u_n} \times v_n\right) = 0$ (o limite do produto entre um infinitésimo, sucessão que tende para zero, e uma sucessão limitada é zero). Logo, a sucessão de termos geral $\frac{v_n}{u_n}$ é convergente o que implica que é limitada, concluindo-se que as afirmações das opções **A** e **C** são verdadeiras.

Logo, só a opção **B** pode ser a falsa, pois caso fosse verdadeira, então a sucessão de termo geral $\frac{n}{u_n} + v_n$ seria convergente e portanto também seria limitada, o que implicaria que todas afirmações eram verdadeiras.

Apesar de já sabermos qual é a resposta correcta, vamos provar que a afirmação de **D** é verdadeira e que a de **B** é falsa.

- $(u_n)$ é uma progressão aritmética de razão positiva, pelo que sendo $r$ a sua razão, com $r > 0$, vem que:

$$u_n = u_1 + (n-1)r = rn - r + u_1$$

Logo, $\lim \frac{n}{u_n} = \lim \frac{n}{rn - r + u_1} = \lim \frac{\cancel{n}}{r\cancel{n}} = \frac{1}{r}$, pelo que como $\frac{1}{r} \in \mathbb{R}$, vem que a sucessão de termo geral $\frac{n}{u_n}$ é convergente e portanto é limitada. Assim, como $(v_n)$ é limitada e como a soma entre duas sucessões limitadas é ainda uma sucessão limitada, vem que a sucessão de termo geral $\frac{n}{u_n} + v_n$ e limitada, pelo que a afirmação da opção **D** é verdadeira.

▪ Já vimos que $\lim \frac{n}{u_n} = \frac{1}{r}$, sendo $r$ a razão da progressão aritmética $(u_n)$

A sucessão $(v_n)$ só toma três valores distintos, $-1$, $0$ e $1$, de facto:

$$v_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\,;\ v_2 = \cos(\pi) = -1\,;\ v_3 = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0\,;\ v_4 = \cos(2\pi) = 1$$

$$v_5 = \cos\left(\frac{5\pi}{2}\right) = 0\,;\ v_6 = \cos(3\pi) = -1\,;\ v_7 = \cos\left(\frac{7\pi}{2}\right) = 0\,;\ v_8 = \cos(4\pi) = 1$$

ou seja, os termos repetem-se de quatro em quatro (a sucessão é periódica de período fundamental $4$). Assim:

▪ reparando nos termos de ordem ímpar, o seu valor é sempre $0$, pelo que se $n$ é ímpar, tem.se que:

$$\lim\left(\frac{n}{u_n} + v_n\right) = \lim \frac{n}{u_n} + \lim(v_n) = \frac{1}{r} + 0 = \frac{1}{r}$$

▪ reparando nos termos em que ordem é um múltiplo de $4$, o seu valor é sempre $1$, pelo que se $n$ é um múltiplo de $4$, tem-se que:

$$\lim\left(\frac{n}{u_n} + v_n\right) = \lim \frac{n}{u_n} + \lim(v_n) = \frac{1}{r} + 1 = \frac{1}{r} + 1$$

Logo, como $\frac{1}{r} \neq \frac{1}{r} + 1$, vem que a sucessão de termos geral $\frac{n}{u_n} + v_n$ não tem limite e portanto não é convergente concluindo-se que a afirmação da opção **B** é falsa.

**Resposta: B**

**1.2.** Seja $r$ a razão da progressão aritmética $(u_n)$

Tem-se que:

▪ $u_1 + u_2 + u_3 = 9 \underset{\substack{u_3 = u_1 + 2r \\ u_2 = u_1 + r}}{\Leftrightarrow} u_1 + u_1 + r + u_1 + 2r = 9 \Leftrightarrow 3u_1 + 3r = 9 \underset{\div 3}{\Leftrightarrow} u_1 + r = 3 \Leftrightarrow u_1 = 3 - r$

▪ $u_5 + u_{14} = 66 \underset{\substack{u_5 = u_1 + 4r \\ u_{14} = u_1 + 13r}}{\Leftrightarrow} u_1 + 4r + u_1 + 13r = 66 \Leftrightarrow 2u_1 + 17r = 66 \underset{u_1 = 3 - r}{\Leftrightarrow} 2(3 - r) + 17r = 66 \Leftrightarrow 6 - 2r + 17r = 66 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 15r = 60 \Leftrightarrow r = \frac{60}{15} \Leftrightarrow r = 4 \Rightarrow u_1 = 3 - 4 = -1$$

Assim, $u_n = u_1 + (n-1)r = -1 + (n-1)\times 4 = -1 + 4n - 4 = 4n - 5$, pelo que a soma dos cinquenta primeiros termos de $(u_n)$ é igual a $u_1 + u_2 + \ldots + u_{50} = \frac{u_1 + u_{50}}{2} \times 50 = \frac{-1 + 4\times 50 - 5}{2} \times 50 = 97 \times 50 = 4850$.

- sabemos que os termos da sucessão $(v_n)$ se repetem de quatro em quatro: $v_1 = 0$, $v_2 = -1$, $v_3 = 0$ e $v_4 = 1$, repetindo-se este padrão. Assim, como $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0 - 1 + 0 + 1 = 0$, vem que:

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = v_5 + v_6 + v_7 + v_8 = v_9 + v_{10} + v_{11} + v_{12} = \ldots = v_{45} + v_{46} + v_{47} + v_{48} = 0$$

Mas:

- $v_{49} = \cos\left(\frac{49\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{48\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(24\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

- $v_{50} = \cos\left(\frac{50\pi}{2}\right) = \cos(25\pi) = \cos(\pi) = -1$

Pelo que a soma dos cinquenta primeiros termos da sucessão $(v_n)$ é igual a:

$$\underbrace{\underbrace{v_1 + v_2 + v_3 + v_4}_{0} + \underbrace{v_5 + v_6 + v_7 + v_8}_{0} + \underbrace{v_9 + v_{10} + v_{11} + v_{12}}_{0} + \ldots + \underbrace{v_{45} + v_{46} + v_{47} + v_{48}}_{0}}_{0} + v_{49} + v_{50} = 0 + 0 - 1 = -1$$

$\therefore$ A soma dos cinquenta primeiros termos da sucessão $(w_n)$, definida por $w_n = u_n + v_n$ é igual a:

$$w_1 + \ldots + w_{50} = \underbrace{u_1 + u_2 + \ldots + u_{50}}_{4850} + \underbrace{v_1 + v_2 + \ldots + v_{50}}_{-1} = 4850 - 1 = 4849$$

**2.** Se ${}^nC_{20}$ é o maior elemento da linha $n$, então é o elemento central dessa linha, pelo que antes dele estão vinte elementos, do ${}^nC_0$ ao ${}^nC_{19}$, e após estão outros vinte, do ${}^nC_{21}$ ao ${}^nC_{40}$:

$$\underbrace{{}^nC_0 \quad {}^nC_1 \quad {}^nC_2 \quad \cdots \quad {}^nC_{19}}_{20\ elementos} \quad \underset{\substack{\downarrow \\ maior \\ elemento}}{{}^nC_{20}} \quad \underbrace{{}^nC_{21} \quad \cdots \quad {}^nC_{38} \quad {}^nC_{39} \quad {}^nC_{40}}_{20\ elementos}$$

Portanto, a linha $n$ é a linha $40$ que tem $41$ elementos, pelo que o número de casos possíveis é ${}^{41}C_3$.

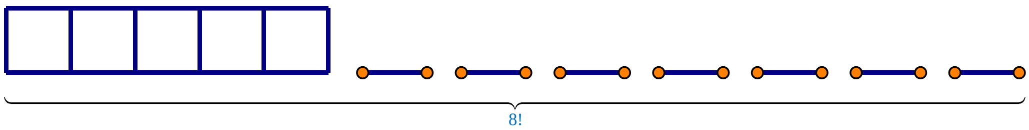
Assim, como $n = 40$, vem que ${}^{n-1}C_9 + {}^{n-1}C_{10} = {}^{39}C_9 + {}^{39}C_{10} = {}^{40}C_{10}$, pelo que o outro elemento da linha $40$ com o mesmo valor do que ${}^{40}C_{10}$ é ${}^{40}C_{40-10} = {}^{40}C_{30}$:

$$\underbrace{{}^{40}C_0 \quad {}^{40}C_1 \quad \cdots \quad {}^{40}C_{10}}_{\substack{11\ elementos\ com\ valor \\ inferior\ ou\ igual\ a\ {}^{40}C_{10}}} \quad \underbrace{{}^{40}C_{11} \quad \cdots \quad {}^{40}C_{20} \quad \cdots \quad {}^{40}C_{29}}_{19\ elementos\ com\ valor\ superior\ a\ {}^{40}C_{10}} \quad \underbrace{{}^{40}C_{30} \quad \cdots \quad {}^{40}C_{39} \quad {}^{40}C_{40}}_{\substack{11\ elementos\ com\ valor \\ inferior\ ou\ igual\ a\ {}^{40}C_{10}}}$$

Portanto, para determinarmos o número de casos favoráveis escolhem-se dois elementos entre os $19$ com valor superior a ${}^{40}C_{10}$ (representados a encarnado) e um elemento entre os $22$ com valor inferior ou igual a ${}^{40}C_{10}$ (representados a azul), o número de maneiras de o fazer é ${}^{19}C_2 \times {}^{22}C_1$, ou escolhem-se três elementos entre os $19$ com valor superior a ${}^{40}C_{10}$, o número de maneiras de o fazer é ${}^{19}C_3$.

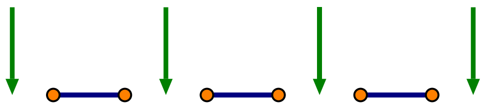
Assim, o número de casos favoráveis é ${}^{19}C_2 \times {}^{22}C_1 + {}^{19}C_3$ e a probabilidade pedida é $\dfrac{{}^{19}C_2 \times {}^{22}C_1 + {}^{19}C_3}{{}^{41}C_3} \approx 0,44$.

**3.** Vamos começar por agrupar a Ana, a Bruna, o Carlos, a Diana e o Ezequiel num bloco:




Assim, o bloco e os restantes sete amigos permutam entre si de $8!$ maneiras distintas (o bloco e os sete amigos é equivalente a termos oito amigos a permutarem entre si, o bloco conta como uma pessoa). Falta de quantas maneiras podemos distribuir Ana, a Bruna, o Carlos, a Diana e o Ezequiel dentro do bloco.

A Ana e a Bruna não podem ficar lado a lado, pelo que têm de ocupar posições entre os restantes três ou nas pontas, isto é, podem ocupar duas de quatro posições: as duas entre os restantes três mais as duas nas pontas. Essas possibilidades estão indicadas pelas setas na figura seguinte:



Logo, das quatro posições que a Ana e a Bruna podem ocupar escolhem-se duas, o número de maneiras de o fazer é ${}^{4}C_2$. Para cada uma destas maneiras a Ana e a Bruna permutam de $2!$ maneiras nas duas posições escolhidas e os restantes três amigos permutam de $3!$ nas suas posições. Portanto, dentro do bloco, os cinco amigos podem sentar-se de ${}^{4}C_2 \times 2! \times 3!$ maneiras distintas.

$\therefore$ Nas condições do enunciado, os cinco amigos podem sentar-se de ${}^{4}C_2 \times 2! \times 3! \times 8! = 2903040$ maneiras distintas.

**Resposta: B**

**4.** Sejam $A$ e $B$ os acontecimentos:

$A$: «a bola retirada é encarnada»

$B$: «a bola retirada está numerada com um número par»

Do enunciado, tem-se:

- $30\%$ das bolas são encarnadas, ou seja, $P(A)=\frac{3}{10} \Leftrightarrow P(\bar{A})=0,7$

- entre todas as bolas encarnadas, $5$ em cada $12$ estão numeradas com números pares, isto é, $P(B|A)=\frac{5}{12}$.

Portanto, $P(B|A)=\frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{5}{12} \underset{P(A)=0,3}{\Leftrightarrow} P(A\cap B)=\frac{5}{12}\times 0,3 \Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{8}$

- $52,5\%$ das bolas são pretas e estão numeradas com um número par, ou seja, $P(\bar{A}\cap B)=0,525$

Portanto, $\underbrace{P(\bar{A}\cap B)}_{P(B)-P(A\cap B)}=0,525 \underset{\substack{0,525=\frac{21}{40} \\ P(A\cap B)=\frac{1}{8}}}{\Leftrightarrow} P(B)-\frac{1}{8}=\frac{21}{40} \Leftrightarrow P(B)=\frac{21}{40}+\frac{1}{8} \Leftrightarrow P(B)=\frac{13}{20}$

A probabilidade de a bola retirada ser encarnada, sabendo que está numerada com número par é dada por $P(A|B)$.

Portanto, a probabilidade pedida é $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{13}{20}}=\frac{20}{8\times 13}=\frac{\cancel{4}\times 5}{2\times\cancel{4}\times 13}=\frac{5}{26}$.

**5.** A função $g$ é contínua em $[-1,+\infty[$, pelo que é contínua em $x=k$ e portanto $\lim_{x\to k^-} g(x)=\lim_{x\to k^+} g(x)=g(k)$.

Assim:

- $\lim_{x\to k^+} g(x)=\lim_{x\to k^+} x=k$

- $g(k)=k$

- $$\lim_{x\to k^-} g(x) = \lim_{x\to k^-} \frac{x e^{x-k}-k}{\operatorname{sen}(k-x)} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to k^-} \frac{\frac{x e^{x-k}-k}{x-k}}{\frac{\operatorname{sen}(k-x)}{x-k}} = \frac{\lim\limits_{x\to k^-} \frac{x e^{x-k}-k}{x-k}}{\lim\limits_{x\to k^-} \frac{\operatorname{sen}(k-x)}{x-k}} \underset{\substack{y=x-k \Leftrightarrow x=y+k \\ \text{Logo, } k-x=-(x-k)=-y \\ x\to k^- \Rightarrow y\to 0^-}}{=} \frac{\lim\limits_{y\to 0^-} \frac{(y+k)e^y-k}{y}}{\lim\limits_{y\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(-y)}{y}} =$$

$$\underset{\substack{\operatorname{sen}(-y)=-\operatorname{sen} y \\ \text{A função seno} \\ \text{é ímpar}}}{=} \frac{\lim\limits_{y\to 0^-} \frac{y e^y + k e^y - k}{y}}{-\underbrace{\lim\limits_{y\to 0^-} \frac{\operatorname{sen} y}{y}}_{\text{Limite notável}}} = \frac{\lim\limits_{y\to 0^-} \frac{\cancel{y} e^y}{\cancel{y}} + \lim\limits_{y\to 0^-} \frac{k(e^y-1)}{y}}{-1} = -e^0 - k \times \underbrace{\lim\limits_{y\to 0^-} \frac{e^y-1}{y}}_{\text{Limite notável}} = -1-k\times 1 = -1-k$$

Logo, $-1-k = k \Leftrightarrow -1 = 2k \Leftrightarrow k = -\frac{1}{2}$.

**6.** Seja $z = x + yi$, com $x, y \in \mathbb{R}$

Tem-se que $(z+\bar{z})^2 - (z-\bar{z})^2 = 16 \Leftrightarrow \left(x + \cancel{yi} + x - \cancel{yi}\right)^2 - \left(x + yi - (x - yi)\right)^2 = 16 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (2x)^2 - \left(\cancel{x} + yi - \cancel{x} + yi\right)^2 = 16 \Leftrightarrow 4x^2 - (2yi)^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 4y^2 i^2 = 16 \underset{i^2=-1}{\Leftrightarrow} 4x^2 + 4y^2 = 16 \underset{\div 4}{\Leftrightarrow} x^2 + y^2 = 4$$

Logo, a condição $(z+\bar{z})^2 - (z-\bar{z})^2 = 16$ define uma circunferência de raio $\sqrt{4} = 2$ centrada na origem.

**Resposta: B**

**7.** O afixo do número complexo $\frac{(z_3)^3 \times z_2}{z_1}$ pertence à bissectriz dos quadrantes pares se os seus argumentos forem da forma $-\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Tem-se que $z_1 = (i-3)i^{37} = (i-3)i^{36} \times i = (i-3)\times 1 \times i = i^2 - 3i = -1-3i = -(1+3i)$

Logo:

$$\frac{(z_3)^3 \times z_2}{z_1} = (z_3)^3 \times \frac{1}{z_1} \times z_2 = \left(e^{i\alpha}\right)^3 \times \frac{1}{-\cancel{(1+3i)}} \times \frac{\cancel{1+3i}}{\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{e^{i(3\alpha)}}{-\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{e^{i(3\alpha)}}{\sqrt{2}\, e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)}} = \frac{e^{i(3\alpha)}}{\sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\left(3\alpha - \frac{5\pi}{4}\right)}$$

Portanto:

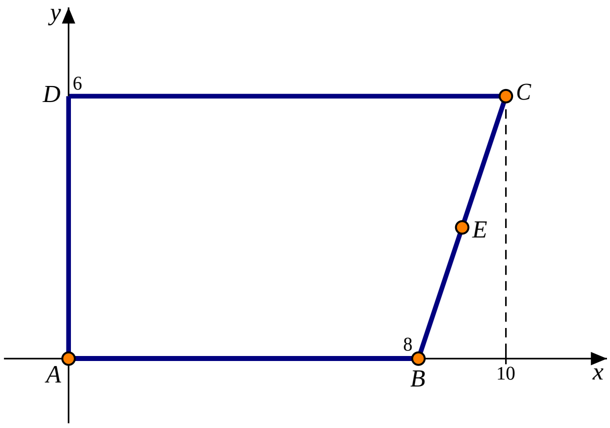
$$3\alpha-\frac{5\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 3\alpha=-\frac{\pi}{4}+\frac{5\pi}{4}+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 3\alpha=\pi+k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow \alpha=\frac{\pi+k\pi}{3}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

Assim:

- $k=0\rightarrow\alpha=\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{3}\notin\left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$
- $k=1\rightarrow\alpha=\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}\notin\left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$
- $k=2\rightarrow\alpha=\pi$ e $\pi\notin\left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$
- $k=3\rightarrow\alpha=\frac{4\pi}{3}$ e $\frac{4\pi}{3}\notin\left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$
- $k=4\rightarrow\alpha=\frac{5\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}\in\left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$
- $k=5\rightarrow\alpha=2\pi$ e $2\pi\notin\left]\frac{3\pi}{2},2\pi\right[$

$\therefore\ \alpha=\frac{5\pi}{3}$

**8.** Representando um trapézio num referencial o.n. $xOy$, em que $A$ coincide com a origem do referencial, $B$ pertence ao eixo $Ox$ e $D$ ao eixo $Oy$, tem-se:




Logo, $A(0,0)$, $B(8,0)$, $C(10,6)$, $D(0,6)$ e as coordenadas do ponto $E$, ponto médio de $[BC]$, são:

$$E\left(\frac{8+10}{2},\frac{0+6}{2}\right)\text{ ou seja, } E(9,3)$$

Portanto, $\overrightarrow{AE}=E-A=(9,3)-(0,0)=(9,3)$ e $\overrightarrow{BD}=D-B=(0,6)-(8,0)=(-8,6)$, pelo que:

$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{BD}=(9,3)\cdot(-8,6)=-72+18=-54$$

**Resposta: D**

**9.** Tem-se que:

$$D=\{x\in\mathbb{R}: x+3>0 \ \wedge \ 6-2x>0 \ \wedge \ x>0\}=\{x\in\mathbb{R}: x>-2 \ \wedge \ x<3 \ \wedge \ x>0\}=]0,3[$$

Neste domínio, tem-se:

$$\log_4(x+3)\geq\log_4(6-2x)-\log_2\left(\sqrt{x}\right)\Leftrightarrow\log_4(x+3)\geq\log_4(6-2x)-\log_2\left(x^{\frac{1}{2}}\right)\Leftrightarrow$$

$$\underset{x>0}{\Leftrightarrow}\log_4(x+3)\geq\log_4(6-2x)-\frac{1}{2}\log_2 x$$

$$\underset{x>0}{\Leftrightarrow}\log_4(x+3)\geq\log_4(6-2x)-\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\times\frac{\log_4 x}{\cancel{\log_4 2}}$$

$$\boxed{i)\ \log_4 2=\frac{\log_2 2}{\log_2 4}=\frac{1}{\log_2 2^2}=\frac{1}{2}}$$

$$\underset{i)}{\Leftrightarrow}\log_4(x+3)\geq\log_4(6-2x)-\log_4 x$$

$$\Leftrightarrow\log_4(x+3)+\log_4 x\geq\log_4(6-2x)$$

$$\Leftrightarrow\log_4\left(x(x+3)\right)\geq\log_4(6-2x)$$

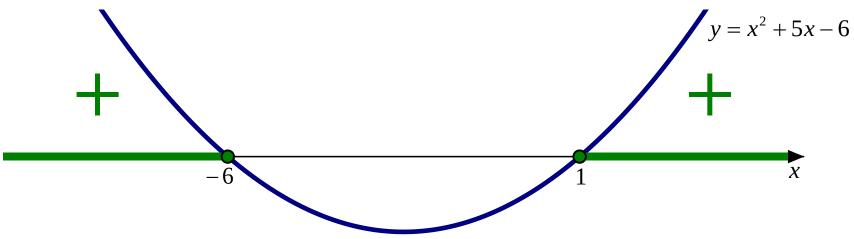
$$\Leftrightarrow x(x+3)\geq 6-2x \ \wedge \ x\in D$$

$$\Leftrightarrow x^2+3x-6+2x\geq 0 \ \wedge \ x\in D$$

$$\Leftrightarrow x^2+5x-6\geq 0 \ \wedge \ x\in D$$

**Cálculo auxiliar:** $x^2+5x-6=0\Leftrightarrow x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times1\times(-6)}}{2\times1}\Leftrightarrow x=-6 \ \vee \ x=1$

O gráfico da função $y=x^2+5x-6$ é uma parábola com a concavidade voltada para cima:



Logo, $x^2+5x-6\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -6 \ \vee \ x\geq 1$, pelo que o conjunto solução da inequação dada é:

$$\left(]-\infty,-6]\cup[1,+\infty[\right)\cap]0,3[=[1,3[$$

**10.**

**10.1.** A amplitude do ângulo $ABC$ é igual à amplitude do ângulo entre os vectores $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$.

Tem-se que:

- $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}=(8,-5,6)$

- o ponto $B$ pertence ao eixo $Ox$, pelo que as suas coordenadas são da forma $B(x_B,0,0)$. Como o ponto $B$ pertence ao plano $BCD$, vem que:

$$3x_B-2\times 0+4\times 0-12=0\Leftrightarrow 3x_B=12\Leftrightarrow x_B=4\Rightarrow B(4,0,0)$$

- o ponto $C$ pertence ao eixo $Oy$, pelo que as suas coordenadas são da forma $C(0,y_C,0)$. Como o ponto $C$ pertence ao plano $BCD$, vem que:

$$3\times 0-2y_C+4\times 0-12=0\Leftrightarrow -2y_C=12\Leftrightarrow y_C=-6\Rightarrow C(0,-6,0)$$

Portanto, $\overrightarrow{BC}=C-B=(0,-6,0)-(4,0,0)=(-4,-6,0)$.

Assim:

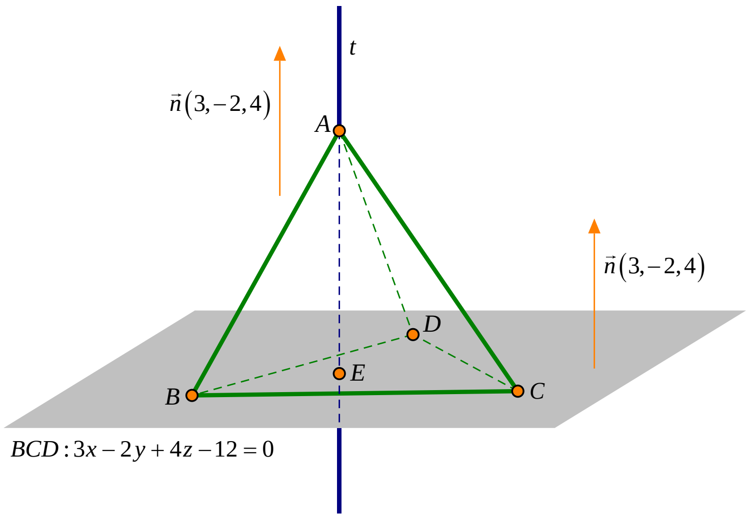
$$\cos\left(A\hat{B}C\right)=\cos\left(\overrightarrow{BA}\,\hat{}\,\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\times\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}=\frac{(8,-5,6)\cdot(-4,-6,0)}{\sqrt{8^2+(-5)^2+6^2}\times\sqrt{(-4)^2+(-6)^2+0^2}}=$$

$$=\frac{-32+30+0}{\sqrt{125}\times\sqrt{52}}=\frac{-\cancel{2}}{5\sqrt{5}\times\cancel{2}\sqrt{13}}=-\frac{1}{5\sqrt{5\times 13}}$$

$$\therefore\ A\hat{B}C=\cos^{-1}\left(-\frac{1}{5\sqrt{65}}\right)\approx 91^{\circ}$$

**10.2.** Seja $t$ a recta perpendicular ao plano $BCD$, que contém a face $[BCD]$, que passa no ponto $A$.

Consideremos a seguinte figura (figura ilustrativa):




A recta $t$ intersecta o plano $BCD$ num ponto $E$, tal que $\overline{AE}$ é a medida da altura da pirâmide em relação à face $[BCD]$.

Assim, como a recta $t$ é perpendicular ao plano $BCD$, um vector director da recta $t$ é $\vec{n}(3,-2,4)$. As coordenadas do ponto $A$ são dadas por $A = B + \overrightarrow{BA} = B - \overrightarrow{AB} = (4,0,0)-(-8,5,-6)=(12,-5,6)$.

Portanto, $t:(x,y,z)=(12,-5,6)+k(3,-2,4),\ k\in\mathbb{R}$, pelo que um ponto genérico da recta $t$ é:

$$(12+3k,-5-2k,6+4k),\ k\in\mathbb{R}$$

Substituindo na equação do plano $BCD$, vem:

$$3(12+3k)-2(-5-2k)+4(6+4k)-12=0 \Leftrightarrow 36+9k+10+4k+24+16k-12=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 29k+58=0 \Leftrightarrow 29k=-58 \Leftrightarrow k=-2$$

Então as coordenadas do ponto $E$ são $E(12+3\times(-2),-5-2\times(-2),6+4\times(-2))$, ou seja, $E(6,-1,-2)$.

$\therefore$ A medida da altura da pirâmide em relação à face $[BCD]$ é:

$$\overline{AE}=\sqrt{(12-6)^2+(-5+1)^2+(6+2)^2}=\sqrt{36+16+64}=\sqrt{116}=2\sqrt{29}$$

**11.** Tem-se que:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{\frac{k}{3}+1}=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)^{\frac{k}{3}+1}$

Assim, como:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(4+\frac{x^3\ln x}{e^x}\right)\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}4+\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\ln x}{e^x}=4+\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\cancel{x^3}\ln x}{\cancel{x^4}}}{\frac{e^x}{x^4}}=4+\frac{\overbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}^{\text{Limite notável}}}{\underbrace{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^4}}_{\text{Limite notável}}}=4+\frac{0}{+\infty}=4+0=4$$

vem que $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{\frac{k}{3}+1}=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)^{\frac{k}{3}+1}=4^{\frac{k}{3}+1}$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\left(\ln(x+8)-\ln x\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}+\frac{8}{x}\right)\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(1+\frac{8}{x}\right)^x=$

$$\underset{y=\ln x\text{ é contínua}}{=}\ln\left(\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{8}{x}\right)^x}_{\text{Limite notável}}\right)=\ln\left(e^8\right)=8$$

**Outra maneira:** $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{8}{x}\right)\right)$

Fazendo $y=\ln\left(1+\frac{8}{x}\right)\Leftrightarrow e^y=1+\frac{8}{x}\Leftrightarrow e^y-1=\frac{8}{x}\Leftrightarrow\frac{x}{8}=\frac{1}{e^y-1}\Leftrightarrow x=\frac{8}{e^y-1}$. Se $x\to+\infty$, então $y=\ln\left(1+\frac{8}{x}\right)\to\ln\left(1+\frac{8}{+\infty}\right)=0$.

Assim, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{8}{x}\right)\right)=\lim\limits_{y\to0}\left(\frac{8}{e^y-1}\times y\right)=8\times\lim\limits_{y\to0}\frac{y}{e^y-1}=8\times\frac{1}{\underbrace{\lim\limits_{y\to0}\frac{e^y-1}{y}}_{\text{Limite notável}}}=8\times\frac{1}{1}=8$.

Portanto, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{\frac{k}{3}+1}>\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\Leftrightarrow4^{\frac{k}{3}+1}>8\Leftrightarrow\left(2^2\right)^{\frac{k}{3}+1}>2^3\Leftrightarrow2^{\frac{2k}{3}+2}>2^3\Leftrightarrow\frac{2k}{3}+2>3\Leftrightarrow$

$$\underset{\times3}{\Leftrightarrow}2k+6>9\Leftrightarrow2k>3\Leftrightarrow k>\frac{3}{2}$$

$\therefore\ k\in\left]\frac{3}{2},+\infty\right[$

**12.** Tem-se que:

▪ a função $f$ é contínua em $[0,+\infty[$ por ser o quociente e a composição entre funções contínuas no seu domínio (funções polinomiais e a função $g$, contínua por hipótese e sem zeros, o que implica que que $y=g(-x)$ também não tem zeros).

Logo, o gráfico de $f$ não tem assimptotas verticais.

▪ $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(g(x)-2x\right)=-2$

Então, a recta de equação $y=2x-2$ é assimptota oblíqua do gráfico de $g$, quando $x\to-\infty$, pelo que:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{g(x)}{x}=2 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}(2x-2)=-\infty$$

Como gráfico de $f$ tem uma assimptota oblíqua de declive $\frac{1}{2}$, vem que a ordenada na origem é dada por:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1-x^2}{g(-x)}-\frac{1}{2}x\right)\underset{\substack{y=-x\Leftrightarrow x=-y\\ x\to+\infty\Rightarrow y\to-\infty}}{=}\lim_{y\to-\infty}\left(\frac{1-(-y)^2}{g(y)}+\frac{y}{2}\right)=\lim_{y\to-\infty}\left(\frac{1}{g(y)}-\frac{y^2}{g(y)}+\frac{y}{2}\right)=$$

$$=\lim_{y\to-\infty}\frac{1}{g(y)}+\lim_{y\to-\infty}\left(-\frac{y^2}{g(y)}+\frac{y}{2}\right)=\frac{1}{\lim\limits_{y\to-\infty}g(y)}+\lim_{y\to-\infty}\frac{-2y^2+yg(y)}{2g(y)}$$

$$=\frac{1}{-\infty}+\frac{1}{2}\times\lim_{y\to-\infty}\frac{y\left(g(y)-2y\right)}{g(y)}=0+\frac{1}{2}\times\lim_{y\to-\infty}\frac{y}{g(y)}\times\lim_{y\to-\infty}\left(g(y)-2y\right)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\lim\limits_{y\to-\infty}\frac{g(y)}{y}}\times(-2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cancel{2}}\times\left(-\cancel{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

Logo, a recta de equação $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$ é a única assimptota do gráfico de $f$.

## 13.

**13.1.** Tem-se que:

- $f'(x)=\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = -\left(\frac{1}{x}\right)' \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \underset{i)}{=} -\left(-\frac{1}{x^2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

- $f''(x)=\left(\frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' = \left(\frac{1}{x^2}\right)'\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' =$

$$\underset{ii)}{=} -\frac{2}{x^3}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}\times\left(\frac{1}{x}\right)'\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$=-\frac{2}{x^3}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}\times\left(-\frac{1}{x}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{2}{x^3}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^4}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$i)\ \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1'\times x - 1\times x'}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$ii)\ \left(\frac{1}{x^2}\right)' = \frac{1'\times x^2 - 1\times\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2} = $$

$$= -\frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{4}3}} = -\frac{2}{x^3}$$

Logo:

$$f''(x)+\frac{2}{x}f'(x) = -\frac{2}{x^3}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^4}\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{2}{x}\times\frac{1}{x^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = \cancel{-\frac{2}{x^3}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}-\frac{1}{x^4}\cos\left(\frac{1}{x}\right)+\cancel{\frac{2}{x^3}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)} =$$

$$=-\frac{1}{x^4}\cos\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\overbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}^{f(x)}}{x^4} = -\frac{f(x)}{x^4}$$

**Resposta: C**

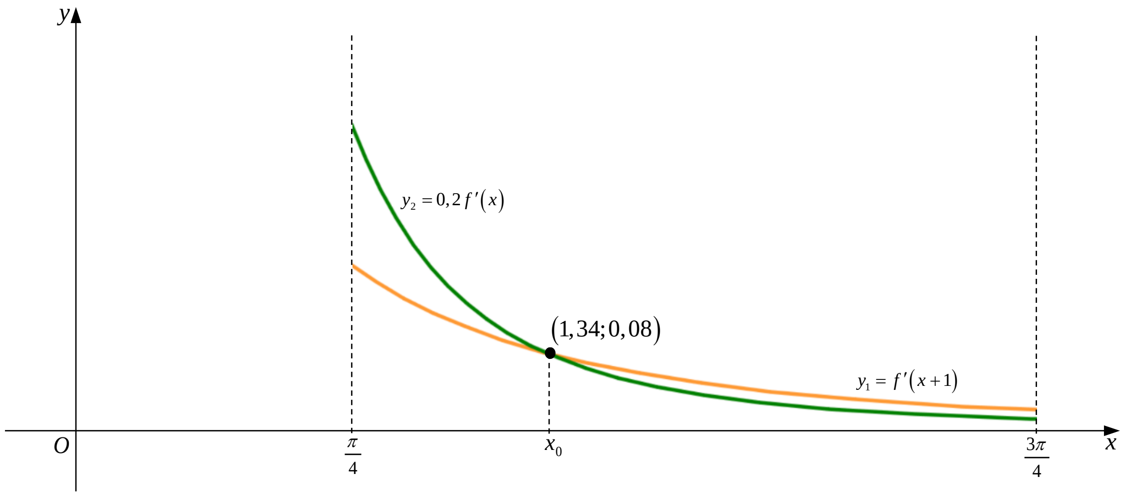
**13.2.** Seja $P$, de coordenadas $(x_0, f(x_0))$, o ponto pedido.

Neste ponto o declive da recta tangente ao gráfico de $f$ é dado por $f'(x_0)$. Quando adicionamos $1$ à abcissa deste ponto obtemos um novo ponto $Q$, de coordenadas $(x_0+1, f(x_0+1))$. Neste novo ponto, o declive da recta tangente é dado por $f'(x_0+1)$ e que diminuiu $80\%$ em relação ao declive da recta tangente ao gráfico de $f$ no ponto $P$, isto é, em relação a $f'(x_0)$. Por outras palavras, $f'(x_0+1)$ é igual a $f'(x_0)$ menos $80\%$ de $f'(x_0)$, que pode ser traduzido por:

$$f'(x_0+1)=f'(x_0)-0{,}8f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x_0+1)=0{,}2f'(x_0)$$

Portanto, pretende-se determinar $x\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ tal que $f'(x+1)=0{,}2f'(x)$.

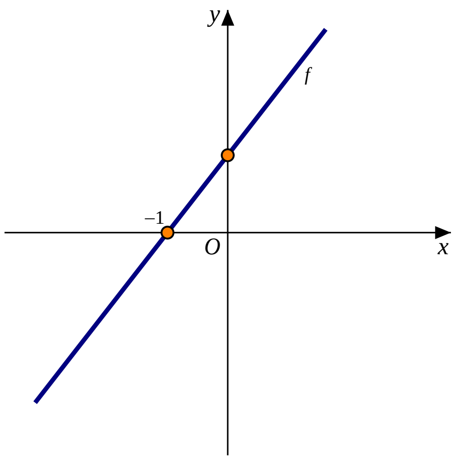
Utilizando o editor de funções da calculadora, define-se $y_1 = f'(x+1)$ e $y_2 = 0,2\,f'(x)$, no intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$:




Então, $f'(x+1) = 0,2\,f'(x) \Leftrightarrow x = x_0$, pelo que as coordenadas do ponto $P$ são $(x_0, f(x_0))$, em que $x_0 \approx 1,34$ e

$f(x_0) = \cos\left(\frac{1}{x_0}\right) \approx \cos\left(\frac{1}{1,34}\right) \approx 0,73$.

**14.** A função $f$ é afim, pelo que a sua expressão é da forma $f(x) = mx + b$, com $m, b \in \mathbb{R}$. Como o gráfico de $f$ intersecta o eixo $Ox$ no ponto de abcissa $-1$ e o eixo $Oy$ num ponto de ordenada positiva, vem que $f$ é crescente, pelo que $m > 0$, como se ilustra na figura seguinte:




Mas $f(-1) = 0$, pelo que $f(-1) = 0 \Leftrightarrow -m + b = 0 \Leftrightarrow b = m$ e portanto $f(x) = mx + m$, com $m > 0$.

Assim, $g(x) = e^{x^2 - x} \times f(x) = e^{x^2 - x} \times (mx + m) = m e^{x^2 - x}(x+1)$

Portanto:

- $g'(x)=\left(me^{x^2-x}(x+1)\right)'=m\left(e^{x^2-x}(x+1)\right)=m\left(\left(e^{x^2-x}\right)'(x+1)+e^{x^2-x}(x+1)'\right)=$

$$=m\left(\left(x^2-x\right)'e^{x^2-x}(x+1)+e^{x^2-x}\times 1\right)=m\left((2x-1)e^{x^2-x}(x+1)+e^{x^2-x}\right)$$

$$=m\left(e^{x^2-x}\left((2x-1)(x+1)+1\right)\right)=me^{x^2-x}\left(2x^2+2x-x-\cancel{1}+\cancel{1}\right)=me^{x^2-x}\left(2x^2+x\right)$$

- $g'(x)=0\Leftrightarrow me^{x^2-x}\left(2x^2+x\right)=0\Leftrightarrow \underbrace{me^{x^2-x}=0}_{\text{Eq. Impossível em } \mathbb{R}} \vee\ 2x^2+x=0\Leftrightarrow x(2x+1)=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=0\ \vee\ 2x+1=0\Leftrightarrow x=0\ \vee\ x=-\frac{1}{2}$$

Elaborando um quadro de sinal de $g'$ e relacionando com a monotonia de $g$, vem:

| $x$ | $-\infty$ | $-\frac{1}{2}$ | | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $me^{x^2-x}$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $2x^2+x$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $g$ | $\nearrow$ | máx. | $\searrow$ | mín. | $\nearrow$ |

Logo, a função $g$ tem mínimo relativo em $x=0$ que é $g(0)=e^{0^2-0}\times f(0)=e^0\times f(0)=1\times f(0)=f(0)$.

$\therefore$ $f(0)$ é mínimo relativo da função $g$.

**15.** A função $h$ é contínua em $\mathbb{R}^+$, por ser o quociente entre funções contínuas no seu domínio (funções polinomiais e logarítmicas), pelo que $h$ é contínua em $\left[e,e^4\right]\subset\mathbb{R}^+$.

Tem-se que:

- $h(e)=\dfrac{e}{\ln e}=\dfrac{e}{1}=e$

Como $e<3$ e $3<a$, vem que $e<a$, pelo que $h(e)<a$.

- $h\left(e^4\right)=\dfrac{e^4}{\ln\left(e^4\right)}=\dfrac{e^4}{4}$

Como $e>2$, vem que $e>2 \Leftrightarrow e^4>2^4 \Leftrightarrow \dfrac{e^4}{4}>\dfrac{2^4}{4} \Leftrightarrow \dfrac{e^4}{4}>4$. Assim, como $4>a$, tem-se que:

$$\frac{e^4}{4}>a \Leftrightarrow h\left(e^4\right)>a$$

Portanto, $h(e)<a<h\left(e^4\right)$, pelo que, pelo teorema de Bolzano-Cauchy, existe pelo menos um $c\in\left]e,e^4\right[$ tal que $h(c)=a$, ou seja, a equação $h(x)=a$ é possível em $\left]e,e^4\right[$.

Falta verificar que a solução da equação que já garantimos existir é única. Para tal vamos usar a derivada de $h$ e mostrar que é positiva no intervalo $\left]e,e^4\right[$. Assim:

$$h'(x)=\left(\frac{x}{\ln x}\right)'=\frac{x'\ln x-x(\ln x)'}{\ln^2 x}=\frac{1\times\ln x-\cancel{x}\times\frac{1}{\cancel{x}}}{\ln^2 x}=\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}$$

Então, $h'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}>0 \underset{\ln^2 x>0,\ \forall x\in\mathbb{R}^+\setminus\{0\}}{\Leftrightarrow} \ln x-1>0 \Leftrightarrow \ln x>1 \underset{1=\ln e}{\Leftrightarrow} \ln x>\ln e \Leftrightarrow x>e$.

Logo, $h'(x)>0$ para todo o $x>e$, pelo que a função $h$ é crescente em $\left[e,+\infty\right[$ o que implica que $h$ é crescente em $\left]e,e^4\right[$ concluindo-se então que a equação dada tem uma única solução neste intervalo.

**F I M**