FICHAS DE TRABALHO | 12.º ANO | COMPILAÇÃO

TEMA 4 | PRIMITIVAS E INTEGRAIS

Site: http://www.mathsuccess.pt

Facebook: https://www.facebook.com/MathSuccess

# TEMA 4

# PRIMITIVAS E INTEGRAIS

**1.** (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 1 | Tema 4 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Primitivas

**1.1.** Sejam $f$ , $g$ e $h$ três funções deriváveis em $\mathbb{R}$ tais que:

$$h'(x)-(f'\times g)(x)=(f\times g')(x), \qquad f(2)=g(2)=3 \qquad \text{e} \qquad h(2)=(f(2)-1)^2$$

Então, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

**A** $h(x)=(f\times g)(x)+5$

**B** $h(x)=\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)+3$

**C** $h(x)=\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)-3$

**D** $h(x)=(f\times g)(x)-5$

**1.2.** Seja $g$ uma função duas vezes derivável em $\mathbb{R}$ tais que $g''(x)=-e^{-x+1}+\dfrac{2}{x^2}$ , $g'(1)=2$ e $g(1)=0$ .

Determine a expressão analítica da função $g$.

**1.3.** Considere a função $f$ , de domínio $\mathbb{R}$ , definida por $f(x)=\text{sen}^2\,x$ .

**a)** Determine $\displaystyle\int f(x)\,dx$ .

**b)** Determine a primitiva da função $f-f^2$ que se anula em $\dfrac{\pi}{2}$ .

**Sugestão:** tenha em conta que $\cos(2x)=\cos^2 x-\text{sen}^2\,x$ .

**1.4.** Determine, em intervalos convenientes, as seguintes primitivas:

**a)** $\displaystyle\int\left(2x^3+\frac{x}{\sqrt[3]{x^4}}+\sqrt{2x+1}+4\right)dx$

**b)** $\displaystyle\int (x^2+1)(x^3+3x)^5\,dx$

**c)** $\displaystyle\int\left(x^2+\text{sen}(4x)+x^2\cos(3x^3)\right)dx$

**d)** $\displaystyle\int\frac{x}{x^4+2x^2+1}\,dx$

**e)** $\displaystyle\int\frac{1}{3x+1}\,dx$

**f)** $\displaystyle\int\frac{2x+1}{x+3}\,dx$

g) $\int \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}+2x}dx$

h) $\int \frac{\ln^3(3x)}{x}dx$

i) $\int \frac{dx}{\operatorname{tg} x}$

j) $\int \operatorname{sen}(2x)e^{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

l) $\int \operatorname{sen} x\left(\operatorname{sen}^2 x-1\right)^5 dx$

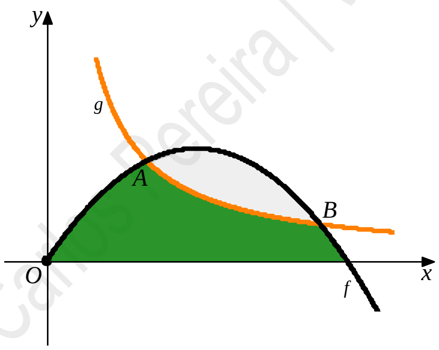
m) $\int \left(\cos^3 x-\cos x\right)dx$

**Proposta de Resolução aqui:** http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema4-ficha1-ex1-novo.html

**2.** (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 2 | Tema 4 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Sejam $f$ e $g$ as funções de domínios $\mathbb{R}_0^+$ e $\mathbb{R}^+$, respectivamente, definidas por $f(x)=\frac{-x^2+3x}{2}$ e $g(x)=\frac{1}{x}$.

Na figura estão representados, em referencial o.n. $xOy$, parte do gráfico da função $f$ e parte do gráfico da função $g$.




Tal como a figura sugere, os gráfico de $f$ e $g$ intersectam-se nos pontos $A$ e $B$, sendo que $A(1,1)$.

**2.1.** Mostre que:

a) $g(2)=\int_1^2\left(-t^{-2}+1\right)dt$

b) $f(x)=\int_{-2}^{x-2}\left(-t-\frac{1}{2}\right)dt$

**2.2.** Determine a área da região sombreada entre os gráficos de $f$ e de $g$. (a área colorida a cinza)

**2.3.** Determine a área da região delimitada pelos gráficos de $f$ e de $g$ e o eixo $Ox$. (a área colorida a verde)

**Proposta de Resolução aqui:** http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema4-ficha2-ex1-novo.html

**3.** (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 3 | Tema 4 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Considere, num referencial o.n. $xOy$, a recta $r$, definida vectorialmente por $(x,y)=(\pi,\pi+1)+k(1,2)$, $k\in\mathbb{R}$ e o gráfico da função $f$, de domínio $D\subseteq\mathbb{R}$, definida por $f(x)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

Seja $F$ a primitiva da função $f$ tal que $F\left(\frac{2\pi}{3}\right)=1$

**3.1.** Considere $D=\left]0,\pi\right[$.

**a)** Qual das seguintes pode ser a expressão analítica de $F$ ?

**A** $\operatorname{sen}(2x)$ **B** $\frac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen} x}$ **C** $-\operatorname{sen}(2x)$ **D** $-\frac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen} x}$

**b)** Calcule a área da região do plano limitada pela recta $r$, pelo gráfico de $f$ e pelas rectas de equações $x=\frac{\pi}{2}$ e $y=0$.

**3.2.** Considere $D=\mathbb{R}$ e sejam $a,b\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[$ tais que $a<b$ e $4a<3\pi$.

**a)** Qual dos seguintes pode ser o valor de $\int_a^b F(x)\,dx$ ?

**A** 6 **B** 5 **C** 4 **D** 3

**b)** Sabendo que $\int_a^{2a} F(x)\,dx=4\operatorname{sen} a$, qual é o valor de $a$ ?

**c)** Mostre que $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}(2x)}=\frac{1}{2}\times\ln\left(\left|\frac{f(x)}{2}\right|\right)+c$, $c\in\mathbb{R}$ e determine $\int_{\frac{a}{12}}^{\frac{a}{4}}\frac{dx}{\operatorname{tg}(2x)}$ no caso de $a=\pi$.

**d)** Seja $g$ a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por $g(x)=2\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-2\cos x+k$, com $k\in\mathbb{R}$.

Determine $k$ de modo que a área limitada pelos gráficos das funções $f$ e $g$ e pelas rectas de equações $x=a$ e $x=a+2$ seja igual a 3.

**Proposta de Resolução aqui:** http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema4-ficha3-ex1-novo.html



## Solucionário

**1.1.** D

**1.2.** $g(x)=-e^{-x+1}-2\ln x+3x-2$

**1.3.** **a)** $\frac{x}{2}-\frac{\operatorname{sen}(2x)}{4}+c$, $c\in\mathbb{R}$

**1.3.** **b)** $(f-f^2)(x)=\frac{x}{8}-\frac{\operatorname{sen}(4x)}{32}-\frac{\pi}{16}$

**1.4.** **a)** $\frac{x^4}{2}+\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}+\frac{\sqrt{(2x+1)^3}}{3}+4x+c$, $c\in\mathbb{R}$

**1.4.** **b)** $\frac{(x^3+3x)^6}{18}+c$, $c\in\mathbb{R}$

**1.4.** **c)** $\frac{x^3}{3}-\frac{\cos(4x)}{4}+\frac{\operatorname{sen}(3x^3)}{9}+c$, $c\in\mathbb{R}$

**1.4.** **d)** $-\frac{1}{2x^2+2}+c$, $c\in\mathbb{R}$

**1.4.** **e)** $\ln(|3x+1|)+c$, $c\in\mathbb{R}$

**1.4.** **f)** $2x-5\ln(|x+3|)+c$, $c\in\mathbb{R}$

**1.4.** **f)** $\frac{\ln(|e^{2x}+2x|)}{2}+c$, $c\in\mathbb{R}$

**1.4.** **g)** $\frac{\ln^4(3x)}{4}+c$, $c\in\mathbb{R}$

**1.4.** **i)** $\ln(|\operatorname{sen} x|)+c$, $c\in\mathbb{R}$

**1.4.** **j)** $e^{\operatorname{sen}^2 x}+c$, $c\in\mathbb{R}$

**1.4.** **l)** $\frac{\cos^{11} x}{11}+c$, $c\in\mathbb{R}$

**1.4.** **m)** $-\frac{\operatorname{sen}^3 x}{3}+c$, $c\in\mathbb{R}$

**2.2.** $\frac{2\sqrt{3}+3}{4}-\ln\left(\sqrt{3}+1\right)$

**2.3.** $\frac{3-\sqrt{3}}{2}+\ln\left(\sqrt{3}+1\right)$

**3.1.** **a)** D

**3.1.** **b)** $\frac{7}{4}$

**3.2.** **a)** D

**3.2.** **b)** $a=\frac{2\pi}{3}$

**3.2.** **c)** $\ln\left(\sqrt{2}\right)$

**3.2.** **d)** $k=-\frac{3}{2}\vee k=\frac{3}{2}$