



FICHAS DE TRABALHO | 12.º ANO | COMPILAÇÃO

TEMA 3 | NÚMEROS COMPLEXOS

Site: <http://www.mathsuccess.pt>

Facebook: <https://www.facebook.com/MathSuccess>

## TEMA 3

# NÚMEROS COMPLEXOS

1. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 1 | Tema 3 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Em  $\mathbb{C}$ , conjuntos dos números complexos, considere os números  $z_1 = 2 + ai$  e  $z_2 = a + i$ , como  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

1.1. Mostre que para todo o  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $\frac{z_1}{\bar{z}_2}$  não é real nem imaginário puro.

1.2. Determine  $a$  de modo que a imagem geométrica de  $(\bar{z}_1)^2 \times (z_2 - a)^{325}$  pertença à bissetriz dos quadrantes ímpares.

1.3. Considere  $a = 1$

a) Determine, na forma algébrica,  $\frac{z_1 \times ((z_2)^3 + 4i)}{z_1 - \bar{z}_2}$ .

b) O número complexo  $z_2$  é raiz do polinómio:

$$P(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2$$

Determine as restantes raízes de  $P(z)$  e decompôna-o num produto de polinómios irredutíveis.

c) Resolva, em  $\mathbb{C}$ , as seguintes equações:

c1)  $z^3 \times z_1 + z^2 \times z_2 = 3z^3$

c2)  $z \times z_2 - \overline{z \times z_1} = -3 + 4i$

c3)  $(z \times |z_1|)^2 - z \times |z_2|^2 + 3 = 0$

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema3-ficha1-ex1-novo.html>

2. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 2 | Tema 3 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Em  $\mathbb{C}$ , conjuntos dos números complexos, considere:

$$z_1 = \operatorname{sen} \alpha + i \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \alpha, \text{ com } \alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[ \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{e^{\frac{19\pi}{12}i}}{\sqrt{2} + \sqrt{6}i}$$

Sabe-se que a imagem geométrica de  $z_1$  pertence ao terceiro quadrante e  $0 \leq \operatorname{Arg}(z_1) < 2\pi$ .

2.1. Mostre que  $z_1 = \operatorname{tg} \alpha e^{i(\alpha+\pi)}$

2.2. Escreva, na forma algébrica, o número complexo  $8\bar{z}_2 + i^{-8n+27}(1-3i)^2$ , com  $n \in \mathbb{N}$ .

2.3. Determine  $\alpha$  de modo que a imagem geométrica de  $(z_1)^2 \times z_2$  pertence à bissetriz dos quadrantes pares.

2.4. Considere  $\alpha = \frac{\pi}{3}$ .

a) Determine as raízes quartas do número complexo  $\frac{\bar{z}_1}{\sqrt{3}i^6 + \sqrt{3}i^9}$  e determine o perímetro do polígono cujos vértices são as imagens geométricas dessas raízes.

Apresente as raízes quartas na forma trigonométrica e o perímetro com denominador racional.

b) Determine o conjunto solução da equação  $\left(\frac{z}{z_2}\right) + \frac{z^2 \times z_1}{|z_1|} = 0$ .

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema3-ficha2-ex1-novo.html>

3. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 3 | Tema 3 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Em  $\mathbb{C}$ , o conjunto dos números complexos, considere  $z_1 = a + bi$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$  e  $z_2 = \frac{5\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}}{1-3i} - i(3-5i)$ .

3.1. Considere as seguintes transformações:

$$f_1(z) = z + z_1 \qquad f_2(z) = z \times \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)^2, \quad n \in \mathbb{N} \qquad f_3(z) = -\bar{z}$$

$$f_4(z) = \frac{z}{4} \qquad f_5(z) = \bar{z} + z_1 \qquad f_6(z) = \overline{z + z_1}$$

- a) Identifique cada uma destas transformações e determine, na forma algébrica, a imagem de  $z_2$  por meio de cada uma destas transformações, no caso quem que  $a = 3$  e  $b = -i^7$ .
- b) Que característica deverá ter  $z_1$  de modo que  $f_5(z) = f_6(z)$ ,  $\forall z \in \mathbb{C}$ .

3.2. Considere as seguintes transformações:

- $f$ : reflexão deslizante de eixo imaginário e vector  $(0, -3)$
- $g$ : rotação de centro na origem em amplitude  $-\frac{\pi}{2}$
- $h$ : homotetia de razão 2

a) Determine  $a$  e  $b$  de modo que a imagem de  $\frac{2z_2}{2-2i}$  por meio de  $h \circ g \circ f$  seja  $z_1$ .

b) Mostre que  $h \circ g = g \circ f$  e determine o menor valor natural de  $n$  de modo que a imagem de  $(-\sqrt{3} - i)^n$  por meio de  $h \circ g$  seja um imaginário puro.

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema3-ficha3-ex1-novo.html>

4. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 4 | Tema 3 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Conjuntos definidos por condições.

4.1. A qual dos seguintes conjuntos definidos em  $\mathbb{C}$  não pertence o número complexo  $i^{\frac{4n^2+5n+1}{n+1}}$ , com  $n \in \mathbb{N}$ .

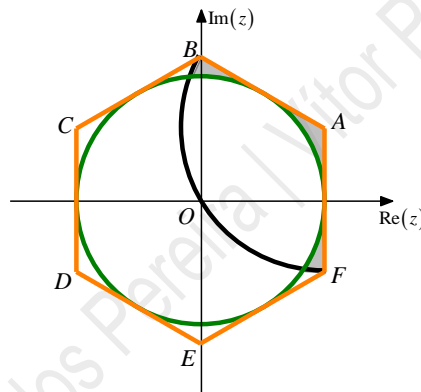
**A**  $\{z \in \mathbb{C} : z = -\bar{z}\}$

**B**  $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

**C**  $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = -3\text{Re}(z) - 1\}$

**D**  $\{z \in \mathbb{C} : |z+1| = |z-1-2i|\}$

4.2. Na figura estão representados, no plano complexo, o polígono regular  $[ABCDEF]$ , o arco  $BF$ , centrado em  $A$ , e a circunferência inscrita no polígono.



Os vértices do polígono são as imagens geométricas das raízes de índice  $n$ , com  $n \in \mathbb{N}$ , de  $-64$ .

Defina por uma condição, em  $\mathbb{C}$ , a região sombreada da figura, incluindo a fronteira.

**Nota:** no programa actual, a notação  $\text{Arg}(z)$  designa o argumento principal do número complexo  $z$ , ou seja, o argumento de  $z$  pertencente ao intervalo  $]-\pi, \pi]$ . Assim, como  $\text{Arg}(z) \in ]-\pi, \pi]$ , a condição  $\alpha \leq \text{Arg}(z) \leq \pi$ , com  $\alpha \in [0, \pi[$ , pode ser escrita simplesmente como  $\text{Arg}(z) \geq \alpha$ . Da mesma forma a condição  $-\pi < \text{Arg}(z) \leq \beta$ , com  $\beta \in ]-\pi, 0]$ , pode ser escrita simplesmente como  $\text{Arg}(z) \leq \beta$ .

4.3. Em  $\mathbb{C}$ , conjunto dos números complexos, sejam  $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ,  $z_2 = re^{i(4\theta)}$  e  $w = 2e^{i\pi} \times \sum_{k=1}^{97} (z_1)^k$ , com

$r \in \mathbb{R}^+$  e  $\theta \in \left[ \frac{\pi}{2}, \pi \right]$ .

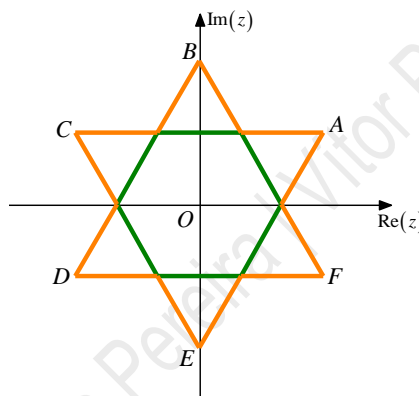
Determine  $r$  e  $\theta$  de modo que o afixo de  $\frac{z_2}{w^2}$  pertença à região do plano definida em  $\mathbb{C}$  pela condição:

$$\text{Arg}(z) = \frac{\pi}{5} \wedge |z| = r^3$$

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema3-ficha4-ex1-novo.html>

5. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 5 | Tema 3 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Na figura está representada, no plano complexo, uma estrela de vértices  $A, B, C, D, E$  e  $F$ , afixos dos números complexos  $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$  e  $z_6$ , respectivamente, formada por um hexágono regular centrado na origem e com dois dos seus vértices no eixo real, e seis triângulos equiláteros, cada um deles com um lado comum ao hexágono.



Sabe-se que a área da estrela é  $27\sqrt{3}$  e que  $z_1 = a\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ , com  $a \in \mathbb{R}^+$ .

5.1. Determine o valor de  $a$ ?

5.2. Escreva:

a)  $z_3$  na forma algébrica

b)  $z_4$  na forma trigonométrica

5.3. A área da região definida pela condição  $\frac{\pi}{3} < \text{Arg}(z + 3\sqrt{3}i) < \frac{2\pi}{3} \wedge -\frac{\pi}{3} < \text{Arg}\left(z + 4,5 - \frac{3\sqrt{3}}{2}i\right) < 0$  é:

**A**  $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

**B**  $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

**C**  $\frac{81\sqrt{3}}{2}$

**D**  $\frac{81\sqrt{3}}{4}$

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema3-ficha5-ex1-novo.html>

Solucionário

1.2.  $a = -2 + 2\sqrt{2} \vee \Leftrightarrow a = -2 - 2\sqrt{2}$

1.3. a)  $2 + 6i$

1.3. b<sub>2</sub>)  $\{1+i, 1-i, i, -i\}; P(z) = (z-1-i)(z-1+i)(z-i)(z+i)$

1.3. c<sub>1</sub>)  $\{0, i\}$

1.3. c<sub>2</sub>)  $\left\{3 - \frac{2}{3}i\right\}$

1.3. c<sub>3</sub>)  $\{4+i, 1+(1-\sqrt{3})i, 1+(1+\sqrt{3})i\}$

2.2.  $-8 + 10i$

2.3.  $\alpha = \frac{\pi}{4}$

2.4. a)  $\frac{1}{\sqrt[8]{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{48}\right)}; \frac{1}{\sqrt[8]{2}}e^{i\frac{23\pi}{48}}; \frac{1}{\sqrt[8]{2}}e^{i\frac{47\pi}{48}}; \frac{1}{\sqrt[8]{2}}e^{i\frac{71\pi}{48}}; \text{Perímetro} = 4\sqrt[8]{8};$

2.4. b)  $\left\{0, 2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{13\pi}{36}\right)}, 2\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{36}}, 2\sqrt{2}e^{i\frac{35\pi}{36}}\right\}$

3.1. a)

$f_1$ : translação de vetor  $(3, 1)$ ;  $-1 - 4i$

$f_2$ : rotação de centro na origem e amplitude  $\frac{4\pi}{3}$ ;  $\frac{4-5\sqrt{3}}{2} + \frac{4\sqrt{3}+5}{2}i$

$f_3$ : reflexão de eixo imaginário;  $4 - 5i$

$f_4$ : homotetia de razão  $\frac{1}{4}$ ;  $-1 - \frac{5}{4}i$

$f_5$ : reflexão de eixo real seguida da translação de vetor  $(3, 1)$ ;  $-1 + 6i$

$f_6$ : reflexão de eixo real após a translação de vetor  $(3, 1)$ ;  $-1 + 4i$

3.1. b)  $z_1$  tem de ser real e nesse caso, se  $z_1$  for um real não nulo estamos perante uma reflexão deslizante de eixo real e vetor  $(a, 0)$ .

3.2. a)  $a = -7$  e  $b = 8$

3.2. b)  $n = 6$

4.1. C

4.2.  $\left(\text{Arg}(z - \sqrt{3} - i) \geq \frac{5\pi}{6} \vee \text{Arg}(z - \sqrt{3} - i) \leq -\frac{\pi}{2}\right) \wedge |z| \geq \sqrt{3} \wedge |z - \sqrt{3} - i| \leq 2$

4.3.  $r = \frac{1}{2}$  e  $\theta = \frac{27\pi}{40}$

5.1.  $a = 3$

5.2. a)  $z_3 = 3\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

5.2. b)  $z_4 = -\frac{9}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

5.3. D