FICHAS DE TRABALHO | 12.º ANO | COMPILAÇÃO

TEMA 3 | NÚMEROS COMPLEXOS

Site: http://www.mathsuccess.pt

Facebook: https://www.facebook.com/MathSuccess

TEMA 3

NÚMEROS COMPLEXOS

1. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 1 | Tema 3 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Em $\mathbb{C}$, conjuntos dos números complexos, considere os números $z_1 = 2 + ai$ e $z_2 = a + i$, como $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1.1. Mostre que para todo o $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\frac{z_1}{z_2}$ não é real nem imaginário puro.

1.2. Determine a de modo que a imagem geométrica de $(\overline{z_1})^2 \times (z_2 - a)^{325}$ pertença à bissectriz dos quadrantes ímpares.

1.3. Considere $a = 1$

a) Determine, na forma algébrica, $\dfrac{z_1 \times \left((z_2)^3 + 4i \right)}{z_1 - \overline{z_2}}$.

b) O número complexo z_2 é raiz do polinómio:

$$P(z) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2$$

Determine as restantes raízes de $P(z)$ e decomponha-o num produto de polinómios irredutíveis.

c) Resolva, em $\mathbb{C}$, a seguintes equações:

c1) $z^3 \times z_1 + z^2 \times z_2 = 3z^3$

c2) $z \times z_2 - \overline{z \times z_1} = -3 + 4i$

c3) $\dfrac{|z_2|^6}{z - z_1} = z^2 - 2z \times z_1 + (z_1)^2$

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema3-ficha1-ex1-novo.html

2. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 2 | Tema 3 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Em $\mathbb{C}$, conjuntos dos números complexos, considere:

$$z_1 = \operatorname{sen}\alpha + i\operatorname{sen}\alpha\operatorname{tg}\alpha \text{, com } \alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\qquad \text{e} \qquad z_2 = \frac{e^{i\frac{19\pi}{12}}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}i}$$

2.1. Mostre que $z_1 = \operatorname{tg}\alpha\, e^{i\alpha}$

2.2. Escreva, na forma algébrica, o número complexo $8\overline{z_2} + i^{-8n+27}(1-3i)^2$, com $n \in \mathbb{N}$.

2.3. Determine α de modo que a imagem geométrica de $(z_1)^2 \times z_2$ pertence à bissectriz dos quadrantes pares.

2.4. Considere $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

a) Determine as raízes quartas do número complexo $\frac{-\overline{z_1}}{\sqrt{3}i^6 + \sqrt{3}i^9}$ e determine o perímetro do polígono cujos vértices são as imagens geométricas dessas raízes.

Apresente as raízes quartas na forma trigonométrica e o perímetro com denominador racional.

b) Determine o conjunto solução da equação $\overline{\left(\frac{z}{z_2}\right)} + \frac{z^2 \times z_1}{|z_1|} = 0$.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema3-ficha2-ex1-novo.html

3. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 3 | Tema 3 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Em $\mathbb{C}$, o conjunto dos números complexos, considere $z_1 = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $z_2 = \frac{5\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}}{1-3i} - i(3-5i)$.

3.1. Considere as seguintes transformações:

$$f_1(z) = z + z_1 \qquad f_2(z) = z \times \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2,\ n \in \mathbb{N} \qquad f_3(z) = -\overline{z}$$

$$f_4(z) = \frac{z}{4} \qquad f_5(z) = \overline{z} + z_1 \qquad f_6(z) = \overline{z + z_1}$$

a) Identifique cada uma destas transformações e determine, na forma algébrica, a imagem de z_2 por meio de cada uma destas transformações, no caso quem que $a = 3$ e $b = -i^7$.

b) Que característica deverá ter z_1 de modo que $f_5(z) = f_6(z)$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

3.2. Considere as seguintes transformações:

- f : reflexão deslizante de eixo imaginário e vector $(0, -3)$
- g : rotação de centro na origem em amplitude $-\frac{\pi}{2}$
- h : homotetia de razão 2

a) Determine a e b de modo que a imagem de $\frac{2z_2}{2-2i}$ por meio de $h \circ g \circ f$ seja z_1.

b) Mostre que $h \circ g = g \circ f$ e determine o menor valor natural de n de modo que a imagem de $\left(-\sqrt{3} - i\right)^n$ por meio de $h \circ g$ seja um imaginário puro.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema3-ficha3-ex1-novo.html

4. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 4 | Tema 3 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Conjuntos definidos por condições.

4.1. A qual dos seguintes conjuntos definidos em $\mathbb{C}$ não pertence o número complexo $i^{\frac{4n^2+5n+1}{n+1}}$, com $n \in \mathbb{N}$.

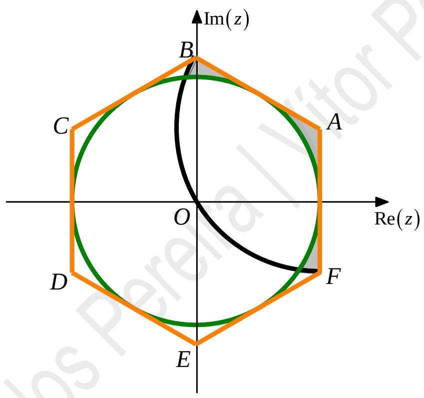
A $\{z \in \mathbb{C} : z = -\bar{z}\}$

B $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

C $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = -3\operatorname{Re}(z) - 1\}$

D $\{z \in \mathbb{C} : |z+1| = |z-1-2i|\}$

4.2. Na figura estão representados, no plano complexo, o polígono regular $[ABCDEF]$, o arco BF, centrado em A, e a circunferência inscrita no polígono.



Os vértices do polígono são as imagens geométricas das raízes de índice n, com $n \in \mathbb{N}$, de -64.

Defina por uma condição, em $\mathbb{C}$, a região sombreada da figura, incluindo a fronteira.

Nota: no programa actual, a notação $\operatorname{Arg}(z)$ designa o argumento principal do número complexo z, ou seja, o argumento de z pertencente ao intervalo $]-\pi, \pi]$. Assim, como $\operatorname{Arg}(z) \in]-\pi, \pi]$, a condição $\alpha \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \pi$, com $\alpha \in [0, \pi[$, pode ser escrita simplesmente como $\operatorname{Arg}(z) \geq \alpha$. Da mesma forma a condição $-\pi < \operatorname{Arg}(z) \leq \beta$, com $\beta \in]-\pi, 0]$, pode ser escrita simplesmente como $\operatorname{Arg}(z) \leq \beta$.

4.3. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_2 = re^{i(4\theta)}$ e $w = 2e^{i\pi} \times \sum_{k=1}^{97} (z_1)^k$, com $r \in \mathbb{R}^+$ e $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

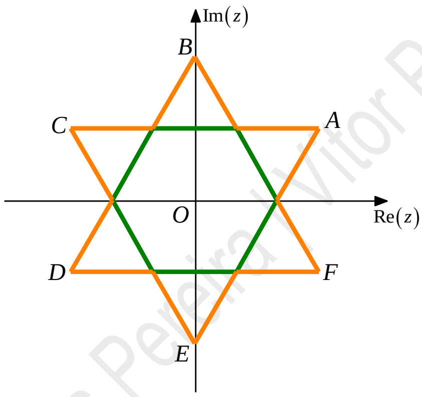
Determine r e θ de modo que o afixo de $\frac{z_2}{w^2}$ pertença à região do plano definida em $\mathbb{C}$ pela condição:

$$\operatorname{Arg}(z)=\frac{\pi}{5} \wedge |z|=r^3$$

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema3-ficha4-ex1-novo.html

5. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 5 | Tema 3 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Na figura está representada, no plano complexo, uma estrela de vértices A, B, C, D, E e F, afixos dos números complexos z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 e z_6, respectivamente, formada por um hexágono regular centrado na origem e com dois dos seus vértices no eixo real, e seis triângulos equiláteros, cada um deles com um lado comum ao hexágono.



Sabe-se que a área da estrela é $27\sqrt{3}$ e que $z_1 = a\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$, com $a \in \mathbb{R}^+$.

5.1. Determine o valor de a?

5.2. Escreva:

a) z_3 na forma algébrica

b) z_4 na forma trigonométrica

5.3. A área da região definida pela condição $\frac{\pi}{3} < \operatorname{Arg}\left(z+3\sqrt{3}i\right) < \frac{2\pi}{3} \wedge -\frac{\pi}{3} < \operatorname{Arg}\left(z+4,5-\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right) < 0$ é:

A $\frac{9\sqrt{3}}{2}$ **B** $\frac{9\sqrt{3}}{4}$ **C** $\frac{81\sqrt{3}}{2}$ **D** $\frac{81\sqrt{3}}{4}$

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema3-ficha5-ex1-novo.html

Solucionário

1.2. $a=-2+2\sqrt{2} \vee \Leftrightarrow a=-2-2\sqrt{2}$

1.3. **a)** $2+6i$

1.3. **b₂)** $\{1+i,1-i,i,-i\}$; $P(z)=(z-1-i)(z-1+i)(z-i)(z+i)$

1.3. **c₁)** $\{0,i\}$

1.3. **c₂)** $\left\{3-\frac{2}{3}i\right\}$

1.3. **c₃)** $\left\{4+i,1+\left(1-\sqrt{3}\right)i,1+\left(1+\sqrt{3}\right)i\right\}$

2.2. $-8+10i$

2.3. $\alpha=\frac{\pi}{4}$

2.4. **a)** $\frac{1}{\sqrt[8]{2}}e^{i\left(-\frac{\pi}{48}\right)}$; $\frac{1}{\sqrt[8]{2}}e^{i\frac{23\pi}{48}}$; $\frac{1}{\sqrt[8]{2}}e^{i\frac{47\pi}{48}}$; $\frac{1}{\sqrt[8]{2}}e^{i\frac{71\pi}{48}}$; $Perímetro=4\sqrt[8]{8}$;

2.4. **b)** $\left\{0,2\sqrt{2}e^{i\left(-\frac{\pi}{36}\right)},2\sqrt{2}e^{i\frac{23\pi}{36}},2\sqrt{2}e^{i\frac{47\pi}{36}}\right\}$

3.1. **a)**

f_1: translação de vetor $(3,1)$; $-1-4i$

f_2: rotação de centro na origem e amplitude $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{4-5\sqrt{3}}{2}+\frac{4\sqrt{3}+5}{2}i$

f_3: reflexão de eixo imaginário; $4-5i$

f_4: homotetia de razão $\frac{1}{4}$; $-1-\frac{5}{4}i$

f_5: reflexão de eixo real seguida da translação de vetor $(3,1)$; $-1+6i$

f_6: reflexão de eixo real após a translação de vetor $(3,1)$; $-1+4i$

3.1. **b)** z_1 tem de ser real e nesse caso, se z_1 for um real não nulo estamos perante uma reflexão deslizante de eixo real e vetor $(a,0)$.

3.2. **a)** $a=-7$ e $b=8$

3.2. **b)** $n=6$

4.1. C

4.2. $\left(\text{Arg}\left(z-\sqrt{3}-i\right)\geq\frac{5\pi}{6} \vee \text{Arg}\left(z-\sqrt{3}-i\right)\leq-\frac{\pi}{2}\right) \wedge |z|\geq\sqrt{3} \wedge \left|z-\sqrt{3}-i\right|\leq 2$

4.3. $r=\frac{1}{2}$ e $\theta=\frac{27\pi}{40}$

5.1. $a=3$

5.2. **a)** $z_3=3\sqrt{3}e^{i\frac{5\pi}{6}}$

5.2. **b)** $z_4=-\frac{9}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$

5.3. D