FICHAS DE TRABALHO | 12.º ANO | COMPILAÇÃO

TEMA 2 | FUNÇÕES

Site: http://www.mathsuccess.pt

Facebook: https://www.facebook.com/MathSuccess

TEMA 2

FUNÇÕES

1. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 1 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Teoremas de comparação e enquadramento para sucessões.

1.1. Sejam (u_n) a sucessão definida por $u_n = \begin{cases} \sqrt{v_n} - \sqrt{v_n + 1} & \text{se} \quad n \leq 10^6 \\ (v_n)^2 - v_n & \text{se} \quad n > 10^6 \end{cases}$, onde (v_n) é uma sucessão de tais que $v_n \to +\infty$ e para todo o n natural, $v_n > 2$.

Utilizando o teorema de comparação para sucessões, determine o valor de $\lim u_n$.

1.2. Considere as sucessões (a_n) e (b_n) tais que $\lim a_n = -\infty$ e a partir de uma certa ordem tem-se $a_n \geq b_n$.

Qual dos seguintes não pode ser o termo geral da sucessão (b_n)?

A $-\sqrt[4]{n^8 + 3n + 3}$

B $\dfrac{n^2}{\sqrt[3]{-n^5 + 3n + 1}}$

C $\dfrac{\sqrt{n^5} + 1}{n^2}$

D $-\dfrac{2^n}{3^{-n}}$

1.3. Utilizando o teorema das sucessões enquadradas ou o teorema de comparação para sucessões, determine o valor dos seguintes limites:

a) $\lim \dfrac{n - \operatorname{sen}(n)}{n^2 + n - 1}$

b) $\lim \left(\dfrac{2n - 1}{n + 1} \right)^n$

c) $\lim \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sqrt{\dfrac{2n}{4n^3 + k}}$

d) $\lim \left(\dfrac{9n^2 - 1}{(2n + 1)(2n - 1)} \right)^{-n^2}$

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha1-ex1-novo.html

2. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 2 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{3x^2-12}{2x-4} & \text{se} \quad x<2 \\ k^2-2k+7 & \text{se} \quad x=2 \text{, com } k\in\mathbb{R} \\ \dfrac{3x-6}{\sqrt{x-1}-1} & \text{se} \quad x>2 \end{cases}$$

2.1. Determine:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, resolvendo por dois processos distintos.

d) $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$

2.2. Qual é o valor de k para o qual a função f é contínua em $\mathbb{R}$.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha2-ex1-novo.html

3. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 3 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Sejam $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ três funções definidas por:

$$f(x)=\begin{cases} x^3\cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{se} \quad x<0 \\ 0 & \text{se} \quad x=0 \\ \dfrac{x^5-x^2}{2x^3+4x^2} & \text{se} \quad x>0 \end{cases}, \qquad g(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} & \text{se} \quad x<0 \\ -1 & \text{se} \quad x=0 \\ \dfrac{x\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}} & \text{se} \quad x>0 \end{cases} \quad \text{e} \quad h(x)=\sqrt{x^2+4}$$

3.1. Mostre que existe pelo menos um ponto, cuja abcissa pertence ao intervalo $]0,2[$, uma recta tangente ao gráfico da função h nesse ponto é paralela á recta de equação:

$$(x,y)=(-3,1)+k(4,2),\ k\in\mathbb{R}$$

3.2. Numa pequena composição indique e justifique o valor lógico das seguintes proposições:

a: $f\times g$ tem um mínimo e um máximo absolutos em $[-1,1]$.

b: Aplicando unicamente o teorema de Bolzano, é possível garantir a existência de pelo menos um zero da função $f+g$ no intervalo $\left]-1,\frac{1}{2}\right[$.

c: $\forall c\in]-2,2[:h'(c)\neq\dfrac{h(2)-h(-2)}{4}$

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha3-ex1-novo.html

4. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 4 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Considere um corpo animado de movimento rectilíneo variado e seja x a função de domínio $\mathbb{R}_0^+$, definida por:

$$x(t)=\frac{t^5}{20}-\frac{t^4}{6}-\frac{t^3}{6}+t^2+t+1$$

Que relaciona a posição x do corpo, em metros, em função do tempo t, em segundos.

Sejam v e a, as funções que relacionam a velocidade e aceleração do corpo em função do tempo t, em segundos.

4.1. Sabe-se que a aceleração média do corpo nos primeiros t segundos foi igual a $2\,\text{m/s}^2$.

Determine t. Apresente o resultado arredondado às décimas do segundo.

4.2. Determine os instantes em que a velocidade do corpo foi máxima e mínima sabendo que a função x tem um ponto de inflexão em $t=1$.

4.3. Seja g uma função de domínio $\mathbb{R}$, cuja sua derivada, também de domínio $\mathbb{R}$, é definida por:

$$g'(t)=\begin{cases} a(t) & \text{se} \quad t\geq 1 \\ \dfrac{t^3-2t^2+t}{t^2-3t+2} & \text{se} \quad t<1 \end{cases}$$

a) Indique, justificando, o valor lógico da seguinte proposição:

O teorema de Weierstrass garante a existência de máximo e mínimo da função g' no intervalo $[-1,2]$.

b) Determine, caso exista, $g''(1)$.

c) Para $t\in\left]-\infty,-1\right[$, estude a função g quanto ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha4-ex1-novo.html

5. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 5 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Trigonometria

5.1. Seja h a função de domínio $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\, k\in\mathbb{Z}\right\}$, definida por $h(x)=\left(\cos x-\frac{1}{\cos x}\right)^2$.

a) Mostre que $h(x)=\operatorname{tg}^2 x\,\operatorname{sen}^2 x$.

b) Determine o valor exacto de $h(\operatorname{arctg}(2))$.

c) Mostre que a função h é par e admite π como período.

5.2. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\, k\in\mathbb{Z}\right\}$, definida por:

$$g(x)=2\operatorname{sen}^2(\pi+x)+\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2\operatorname{tg}x\cos(2\pi-x)$$

a) Mostre que $g(x)=(\operatorname{sen}x-1)^2$.

b) Determine as soluções da equação $4g(x)=1$ pertencentes ao intervalo $\left]-\frac{3\pi}{2},\pi\right[$.

c) Seja $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ tais que $\operatorname{tg}\theta=\frac{5}{12}$ e $g(\theta)=1-5m^2$, com $m\in\mathbb{R}$.

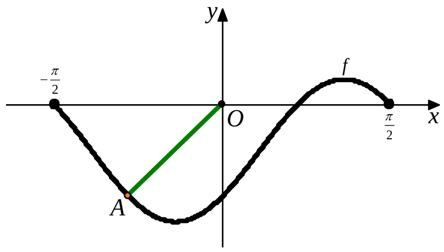
Determine o(s) valor(es) de m.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha5-ex1-novo.html

6. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 6 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, o gráfico da função f, de domínio $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, definida por:

$$f(x)=\operatorname{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\times\cos x-\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\times\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\frac{\sqrt{3}\cos^2 x}{2}$$



e um ponto A que se desloca sobre o gráfico de f.

6.1. Mostre que $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(2x)+\sqrt{3}\operatorname{sen}^2 x-\sqrt{3}}{2}$

6.2. Seja h a função de domínio $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ que a cada valor da abcissa do ponto A faz corresponder a distância do ponto A à origem do referencial.

a) Com base no gráfico da função f comente a seguinte afirmação indicando o seu valor lógico:

"A função h tem um único zero de abcissa positiva"

b) Resolva a equação $2f(x)+\sqrt{3}\cos^2 x+2h(0)=\sqrt{3}$.

c) Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora determine, com arredondamento às décimas, o mínimo absoluto e o respectivo minimizante da função h. Indique todos os cálculos e gráficos utilizados.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha6-ex1-novo.html

7. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 7 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ duas vezes derivável em $\mathbb{R}$ tais que o declive da recta tangente ao seu gráfico no ponto de abcissa $\frac{\pi}{6}$ é $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Sabe-se ainda que $f''\left(\frac{\pi}{6}\right)+f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

7.1. Em qual das seguintes opções estão as coordenadas de um ponto pertencente à recta tangente ao gráfico de f', primeira derivada de f, no ponto de abcissa $\frac{\pi}{6}$?

A $\left(\sqrt{3},\pi\right)$ **B** $\left(\sqrt{3},\frac{\pi}{12}\right)$ **C** $\left(\frac{\pi}{6},\sqrt{3}\right)$ **D** $\left(\pi,\sqrt{3}\right)$

7.2. Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{6x\,f'(x)-3\sqrt{3}x+6x\pi-\pi^2}{6x^2-\pi x}$?

7.3. Admita agora que $f(x)=\operatorname{sen} x$.

a) Mostre que $\left(-f(x)\times\cos x\right)'=2\operatorname{sen}^2 x-1$.

b) Estude, no intervalo $]-\pi,\pi[$ a função g, definida por $g(x)=-\frac{\operatorname{sen}(2x)}{2}$ quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

c) Considere a função h, definida em $\left[-\frac{\pi}{2},2\pi\right]$ definida por $h(x)=2f(x)+g(x)$.

Estude a função h quanto ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha7-ex1-novo.html

8. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 8 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Considere a função definida por $x(t) = A\text{sen}(\omega t)$, com $A < 0$ e $\omega > 0$, que a cada instante t, em segundos, faz corresponder a abcissa de um ponto P que se desloca numa recta numérica.

8.1. Mostre que o sistema enunciado é um oscilador harmónico

8.2. Em relação à função $x(t) = A\text{sen}(\omega t)$, sabe-se que:

- é solução da equação diferencial $x''(t) = -9x'(t)$
- $x\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -2$

a) Determine o valores de A e de ω.

b) Determine a amplitude, pulsação e fase do oscilador harmónico.

c) Qual a frequência do oscilador harmónico?

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha8-ex1-novo.html

9. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 9 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

O João é proprietário de um apartamento que vale 90000€ e que está no mercado de arrendamento a gerar 300€ de renda mensal.

Com as alterações à lei do arrendamento, o estado passou a taxar 35% aos valores das rendas, situação que fez o João considerar a hipótese de vender o apartamento e colocar o montante de 90000€ a render juros numa instituição bancária

Após alguma pesquisa encontrou uma proposta de depósito com juros compostos a uma taxa anual de $2{,}5\%$ com capitalizações semestrais.

9.1. Qual das expressões seguintes dá o valor acumulado líquido das rendas passados n anos?

A $3180n$ **B** $3600n$ **C** $2340n$ **D** $1260n$

9.2. Caso o João opte pelo depósito na instituição bancária, qual o capital acumulado ao fim de:

a) um ano? **b)** dois anos?

9.3. Dada a forte concorrência no mercado de arrendamento o João não consegue aumentar a renda e pretende saber se, nos próximos quatro anos, é mais rentável vender o apartamento e aplicar os $90000€$ no depósito bancário ou se é preferível continuar como está. Considera que não existem outros impostos a pagar na venda da casa.

Ajuda o João a decidir fazendo um estudo do valor acumulado em quatro anos, em cada uma das situações.

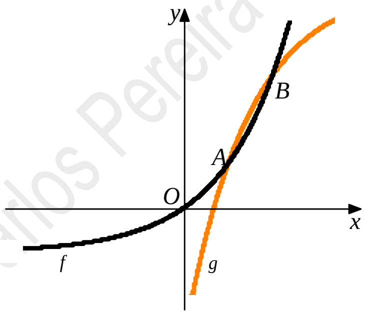
9.4. Quando o João comprou o apartamento, o seu valor era e $70000€$. Para o comprar, o João deu uma entrada de $30000€$ e o restante foi obtido através de um empréstimo num banco a uma taxa anual fixa de $3{,}5\%$, na modalidade de juros compostos, durante vinte e cinco anos.

De quanto foi a prestação mensal devida ao banco?

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha9-ex1-novo.html

10. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 10 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Na figura estão representados, em referencial o.n xOy, parte do gráfico de duas funções f e g, ambas de domínio $\mathbb{R}$, definidas por $f(x)=2^x-1$ e $g(x)=5-8\times2^{-x}$.



Sejam A e B os pontos de intersecção dos gráficos apresentados tais que a abcissa de A é menor que a abcissa de B.

10.1. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $(f-g)(x)<0$.

10.2. Mostre que a equação $f(x)=g(x)+\frac{5}{2}$ tem pelo menos uma solução em $]2,3[$.

10.3. Em qual das opções seguintes pode estar o valor de $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}}\frac{f(x)+1-2\sqrt{2}}{x-\frac{3}{2}}$, com duas casas decimais?

A $-1{,}20$ **B** $-1{,}96$ **C** 0 **D** $1{,}96$

10.4. Considere um ponto C, de abcissa positiva, pertencente à mediatriz do segmento de recta $[AB]$, tais que a área do triângulo $[ABC]$ é $2\sqrt{5}$.

Recorrendo à calculadora gráfica, determine a abcissa do ponto C. Apresente o resultado arredondado às centésimas.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha10-ex1-novo.html

11. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 11 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Considere a função f de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=e^x\left(x^2-x-2\right)$.

11.1. Das afirmações seguintes apenas uma é falsa, Indique-a.

A Os pontos A e B, de ordenada nula, cujas abcissas são respetivamente o maximizante e minimizante de f, são simétricos relativamente à recta de equação $x=-\frac{1}{2}$.

B O gráfico de f tem dois e só dois pontos de inflexão, um de abcissa positiva e outro de abcissa negativa

C O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}^+$.

D $f(x)\leq 0 \Leftrightarrow x\in[-1,2]$

11.2. Determine:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **b)** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **c)** $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{f(x)}{e^2\left(x^3-3x^2+4\right)}-\dfrac{1}{x-2}\right)$

11.3. Faça o estudo da função f relativamente à:

a) existência de assimptotas do seu gráfico.

b) monotonia e existência de extremos relativos.

11.4. Sejam a, b e k três números reais.

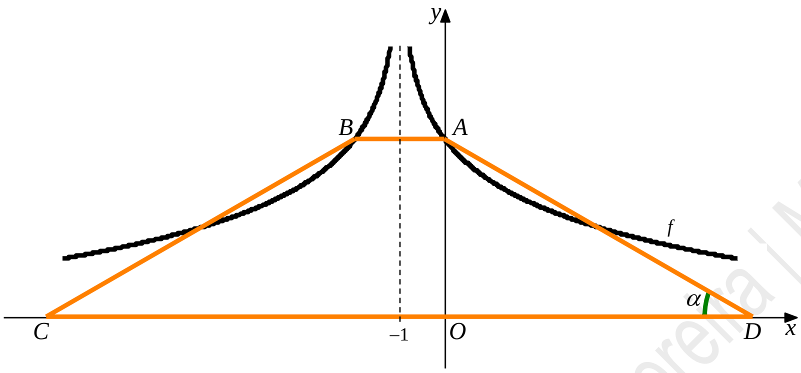
O conjunto de valores de k para os quais a equação $f(x)=k$ tem exactamente duas soluções é $]a,0]\cup\{b\}$.

Recorrendo à calculadora gráfica determine o valores de a e de b, arredondados às centésimas.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha11-ex1-novo.html

12. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 12 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Na figura estão representados, em referencial o.n xOy, parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, definida por $f(x)=6-\ln\left(x^2+2x+1\right)$ e o trapézio isósceles $[ABCD]$.



Sabe-se que:

- A é o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo Oy
- o ponto B pertence ao gráfico de f e tem ordenada igual à do ponto A
- o ponto C de abcissa negativa e o ponto D de abcissa positiva pertencem ao eixo Ox
- a área do trapézio $[ABCD]$ é $36\sqrt{3}+12$
- α é a amplitude em radianos do ângulo CDA

12.1. Qual o valor de α?

12.2. Mostre que $f(x)=-\ln\left(\frac{x+1}{e^3}\right)^2$

12.3. Sejam a e b dois números reais positivos tais que $\ln a = 2\ln b$.

Mostre que:

a) $f(ab-1)=3\ln\left(\frac{e^2}{a}\right)$

b) $f\left(\frac{a}{b}-1\right)=2\ln\left(\frac{e^3}{b}\right)$

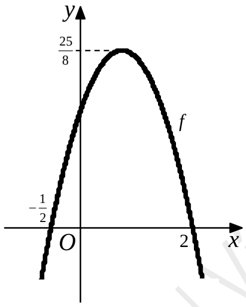
12.4. Apenas uma das expressões seguintes não corresponde à expressão de uma função par. Indique-a.

A $f(x-1)$ **B** $f(|x|)$ **C** $-f(x-1)$ **D** $f(x+1)$

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha12-ex1-novo.html

13. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 13 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f, polinomial de grau 2 e de domínio $\mathbb{R}$.



Tal como a figura sugere, os zeros de f são $-\dfrac{1}{2}$ e 2 e o seu contradomínio é $\left]-\infty,\dfrac{25}{8}\right]$.

Considere ainda a função g, de domínio $]2,+\infty[$, definida por $g(x)=\dfrac{\ln(x-2)}{x}$.

13.1. A expressão analítica de f é do tipo ax^2+bx+c, com $a,b,c\in\mathbb{R}$ e $a\neq 0$.

Determine os valores de a, de b e de c.

13.2. Determine o domínio da função composta $g\circ f$.

13.3. Determine o conjunto solução das seguintes equações:

a) $(g\circ f)(x)=0$

b) $g(e^x)=-\dfrac{x}{e^x}$

13.4. Considere a função h definida em $\mathbb{R}$ por $h(x)=e^{x+m}+n$, com $m,n\in\mathbb{Z}^-$, e sejam A e B os pontos dos gráficos de g e h respectivamente, com ordenada nula.

Sabe-se que $\overline{AB}=2$ e que $\ln\left(\dfrac{5}{m\times n}\right)=0$.

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, determine os valores de m e de n.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha13-ex1-novo.html

14. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 14 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Considere a função f definida em $]1,+\infty[$ por:

$$f(x)=x\ln\left(\frac{e^2}{x-1}\right)+\ln(x-1)$$

14.1. Mostre que $f(x)=(1-x)\ln(x-1)+2x$.

14.2. Determine:

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

14.3. Mostre que a função f tem um **único** zero.

14.4. Seja g a restrição da função f ao intervalo $]1,9]$.

Utilizando métodos exclusivamente analíticos mostre que o contradomínio da função g é $\left[2\ln\left(\dfrac{e^9}{8^4}\right), e+2\right]$.

14.5. Seja h uma função de domínio $]1,+\infty[$ tal que:

$$e^{\frac{h(x)}{1-x}}>(x-1)e^{\frac{2x}{1-x}}$$

Determine $\lim\limits_{x\to +\infty} h(x)$.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha14-ex1-novo.html

15. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 15 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Funções Logarítmicas e Exponenciais. Limites, Continuidade, Assimptotas e Derivadas.

15.1. Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}$ tal que:

- f é derivável em $\left[e, e^5\right]$
- f é estritamente crescente em $\left[e, e^5\right]$
- o contradomínio de f é $[2,4]$

Qual das seguinte proposições é necessariamente verdadeira?

A $\exists c \in \left]e, e^5\right[: \ f''(c) = \dfrac{f'\left(e^5\right) - f'(e)}{e^5 - e}$

B $\forall c \in \left[e, e^5\right], \ f'(x) < 0$

C $\exists c \in \left]e, e^5\right[: \ f(c) = \ln c$

D $\exists x_1, x_2 \in \left[e, e^5\right[: \ x_1 \neq x_2 \ \wedge \ f(x_1) = f(x_2)$

15.2. Seja g a função de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\cos x} - e}{x} & \text{se} \quad x < 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \\ x\left(\ln(x) - 2\right)^2 & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Verifique se g é contínua em $x = 0$.

b) Justifique que g tem mínimo relativo em $x = 0$ e indique o seu valor.

c) Aplicando o teorema das funções enquadradas, determine $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ e aplicando o teorema de comparação para funções, determine $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

d) Mostre que $x \in \mathbb{R}^+$, $g'(x) = \ln\left(\frac{x}{e^2}\right) \times \ln x$.

e) Determine o valor do seguinte limite:

$$\lim_{x \to \sqrt{e}} \frac{e^{x^2 - e} - 1}{2g(x) - 2g\left(\sqrt{e}\right)}$$

f) Estude, em $\mathbb{R}^+$, a função g quanto á monotonia e existência de extremos relativos.

g) Mostre que para $x \in \mathbb{R}^+$, o gráfico de g' tem uma única assimptota vertical e não tem assimptota não vertical.

h) Estude, em $\mathbb{R}^+$, a função g quanto ao sentido das concavidades e existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

i) Determine o conjunto solução da seguinte condição:

$$g(x) = -xg'(x) \;\wedge\; -2\pi < x < 0$$

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha15-ex1-novo.html

16. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 16 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Funções Logarítmicas e Exponenciais. Limites, Continuidade, Assimptotas e Derivadas.

16.1. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $g(x) = \ln^2 x - \ln x$.

a) Determine, por definição, $g'(1)$ e escreva a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1.

b) Determine o valor de

b₁) $\lim_{x \to 0^+} \left(xg(x)\right)$

b₂) $\lim_{x \to 2} \frac{g(x) - \ln\left(\frac{2}{e}\right)\ln 2}{x^2 - 2x}$

.

c) Estude a função g quando à existência de assimptotas do seu gráfico.

d) Estude a função g ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

e) Determine o conjunto solução das seguintes inequações:

e1) $g(x) \geq 6$

e2) $g(x) - \ln^2 x < \ln(x+1) - \ln(3-x)$

16.2. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}$ definida por $h(x) = x^2 e^{3-x^2}$.

a) Seja k um número positivo tal que $\ln k < 2$.

Mostre que a equação $h(x) = x + k$ é possível em $[-1,0]$.

b) Mostre que $h'(x) = 2xe^{3-x^2}(1-x^2)$ e estude a função h quanto à monotonia e a existência de extremos relativos.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha16-ex1-novo.html

17. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 17 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Segundo a Lei do arrefecimento/aquecimento de um corpo descrita por Newton a temperatura de um corpo num dado instante t é dada pelo seguinte modelo exponencial:

$$T(t) = (T_0 - T_a)e^{-kt} + T_a \text{, com } t \geq 0$$

onde T é a temperadora, em graus Celsius num dado instante t, em minutos, T_0 é a temperatura inicial, T_a é a temperatura ambiente e k é a constante de arrefecimento/aquecimento.

17.1. Mostre que $k = \ln\left(\frac{T_0 - T_a}{T - T_a}\right)^{\frac{1}{t}}$.

17.2. Considere dois líquidos, **A** e **B**, respectivamente, com constantes de arrefecimento k_A e k_B, e cujas temperaturas, respectivamente, T_A e T_B, são dadas pela Lei do arrefecimento/aquecimento de Newton.

Sabe-se que:

- $\lim\limits_{t \to +\infty} T_A(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} T_B(t) = 25$
- a temperatura inicial do líquido **A** é de 120 ºC e trinta minutos depois desse instante inicial a sua temperatura diminuiu 50%
- a temperatura inicial do líquido **B** é de 100 ºC e vinte minutos depois desse instante inicial a sua temperatura diminuiu 25%

a) Utilizando os valores de k_A e de k_B arredondados às milésimas, qual é o valor $\frac{k_A}{k_B}$?

A 1,65 **B** 1,35 **C** 0,65 **D** 0,35

b) Escreva as expressões analíticas de T_A e T_B.

c) Qual dos líquidos tem maior taxa de arrefecimento nos primeiros quatro minutos? Justifique.

d) Existe um instante, após o inicial, em que as temperaturas dos dois líquidos são iguais.

Determine esse instante.

Apresente o resultado em segundos, arredondado às unidades.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha17-ex1-novo.html

18. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 18 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Na madrugada de 26 de Abril de 1986, ocorreu o que foi classificado como "pior desastre nuclear da história". Um dos quatro reactores da planta de Chernobyl, na Ucrânia, explodiu e causou um incêndio que libertou cerca de sete toneladas de substâncias radioactivas para a atmosfera.

Depois do acidente, por razões de segurança, foi decretada uma zona inabitada de $2600\,\text{km}^2$ ao redor da planta nuclear até que a massa de substâncias radioactivas libertadas se reduzisse a 0,01%. Ainda hoje essa zona não pode ser habitada e assim será por longos anos.

Segundo um modelo exponencial apropriado, a massa de substâncias radioactivas M, em gramas, existente na área de Chernobil, t anos após o instante da explosão, é dada por:

$$M(t) = 7\times 10^6 \times e^{-4{,}6\times 10^{-4}t}, \text{ com } t \geq 0$$

18.1. Um cientista prevê que a zona de Chernobil volta a ser habitável no ano 22008.

Verifique se a previsão do cientista está correcta de acordo com o modelo exponencial apresentado.

18.2. Determine o valor de $\frac{M(t+1000)}{M(t)}$ e interprete o seu significado no contexto do problema.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

18.3. Justifique se a taxa de desintegração da substância radioactiva aumenta ou diminui ao longo dos anos.

18.4. Determine o valor de x para o qual $2\times M\left(t+x\right)=M\left(t\right)$ e interprete o resultado no contexto do problema.

Apresente o resultado em séculos, arredondado às unidades.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha18-ex1-novo.html

Solucionário

1.1. $+\infty$

1.2. C

1.3. **a)** 0

1.3. **b)** $+\infty$

1.3. **c)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$

1.3. **d)** 0

2.1. **a)** $-\infty$

2.1. **b)** $\frac{3}{2}$

2.1. **c)** $+\infty$

2.1. **d)** 6

2.1. **e)** 6

2.2. $k=1$

3.2. V, F, F

4.1. $t\approx 3{,}3\text{ s}$

4.2. A velocidade é máxima em $t=1$ e mínima em $t=0$ e em $t=2$.

4.3. **a)** Verdadeira

4.3. **b)** Não existe

4.3. **c)** Para $t\in\left]-\infty,-1\right[$ o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $\left[2-\sqrt{2},1\right[$, tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\infty,2-\sqrt{2}\right]$ e tem ponto de inflexão em $x=2-\sqrt{2}$.

5.1. **b)** $\frac{16}{5}$ **5.2.** **b)** $\left\{-\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$ **5.2.** **c)** $m=-\frac{\sqrt{21}}{13} \vee m=\frac{\sqrt{21}}{13}$

6.2. **a)** Falsa. A função h nunca tem zero pois o ponto A nunca coincide com a origem do referencial. **6.2.** **b)** $\left\{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\right\}$

6.2. **c)** Mínimo absoluto: $\approx 0,5$; minimizante: $\approx 0,4$

7.1. B **7.2.** $\frac{11}{2}$

7.3. **b)** No intervalo $]-\pi, \pi[$, a função g é decrescente em $\left]-\pi, -\frac{3\pi}{4}\right]$, em $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ e em $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right[$, é crescente em $\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right]$ e em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$, tem mínimo relativo em $x=-\frac{3\pi}{4}$ e em $x=\frac{\pi}{4}$ e tem máximo relativo em $x=-\frac{\pi}{4}$ e em $x=\frac{3\pi}{4}$.

7.3. **c)** No intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$, o gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $\left[-\frac{\pi}{3}, 0\right]$, em $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ e em $\left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$, tem a concavidade voltada para cima em $\left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right]$, em $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ e em $\left[\pi, \frac{5\pi}{3}\right]$ e tem pontos de inflexão em $x=-\frac{\pi}{3}$, em $x=0$, em $x=\frac{\pi}{3}$, em $x=\pi$ e em $x=\frac{5\pi}{3}$.

8.2. **a)** $A=-2$ e $\omega=3$ **8.2.** **b)** Amplitude: 2; Pulsação: $\omega=3$; Fase: $\varphi=\frac{\pi}{2}$

8.2. **c)** Período: $T=\frac{2\pi}{3}$; Frequência: $\frac{1}{T}=\frac{3}{2\pi}$

9.1. C **9.2.** **a)** $92264,06$€ **9.2.** **b)** $94585,08$€

9.3. Passados quatro anos o João recebe 9360€ de renta. Se optar pelo depósito recebe $9403,75$€. É preferível vender a casa e optar pelo depósito.

9.4. $315,10$€

10.1. $]1,2[$ **10.3.** D

10.4. $A_{[ABC]}=\frac{\sqrt{5\left((c-1,5)^2+(-0,5c+0,75)^2\right)}}{2}$, onde c é a abcissa de C. $A_{[ABC]}=2\sqrt{5} \Leftrightarrow c=c_0$, onde $c_0 \approx 5,08$.

11.1. C **11.2.** **a)** $+\infty$ **11.2.** **b)** 0 **11.2.** **c)** 1

11.3. **a)** A.V: não tem; A.H.: $y=0$, quando $x \to -\infty$; quando $x \to +\infty$, o gráfico de f não tem assimptota.

11.3. **b)** A função f é decrescente em $\left[-\frac{1+\sqrt{13}}{2}, -\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right]$, é crescente em $\left]-\infty, -\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$ e em $\left[-\frac{1-\sqrt{13}}{2}, +\infty\right[$, tem mínimo relativo em $x=-\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ e tem máximo relativo em $-\frac{1+\sqrt{13}}{2}$.

11.4. $a \approx -5,91$ e $b \approx 0,56$

12.1. $\frac{\pi}{6}$ **12.4.** D

13.1. $a=-2$, $b=3$ e $c=2$ **13.2.** $D_{g \circ f}=\left]0, \frac{3}{2}\right[$ **13.3.** **a)** $\left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$ **13.3.** **b)** $\left\{\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\right\}$

13.4. $m=-5$ e $n=-1$

14.2. **a)** 2 **14.2.** **b)** $-\infty$ **14.5.** $-\infty$

15.1. C **15.2.** **a)** g é contínua em $x=0$

15.2. **b)** $g'\left(0^-\right)=-\frac{e}{2}<0$ e $g'\left(0^+\right)=+\infty$. Logo, $g(0)=0$ é mínimo relativo de g.

15.2. **c)** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$. **15.2.** **e)** $-\frac{4\sqrt{e}}{3}$

15.2. **f)** Para $x\in\mathbb{R}^+$, função g é decrescente em $\left[1,e^2\right]$, é crescente em $\left]0,1\right]$ e em $\left[e^2,+\infty\right[$, tem mínimo relativo em $x=e^2$ e tem um máximo relativo em $x=1$.

15.2. **h)** Para $x\in\mathbb{R}^+$, o gráfico da função g tem a concavidade voltada para baixo em $\left]0,e\right]$, tem a concavidade voltada para cima em $\left[e,+\infty\right[$ e tem ponto de inflexão em $x=e$.

15.2. **i)** $\{\pi\}$

16.1. **a)** $g'(1)=-1$; $y=-x+1$ **16.1.** **b1)** 0 **16.1.** **b2)** $\ln\sqrt{2}-\frac{1}{4}$

16.1. **c)** A.V.: $x=0$; o gráfico de g não tem assimptota não vertical.

16.1. **d)** O gráfico da função g tem a concavidade voltada para baixo em $\left[\sqrt{e^3},+\infty\right[$, tem a concavidade voltada para cima em $\left]0,\sqrt{e^3}\right]$ e tem ponto de inflexão em $x=\sqrt{e^3}$.

16.1. **e1)** $\left]0,\frac{1}{e^2}\right]\cup\left[e^3,+\infty\right[$ **16.1.** **e2)** $\left]1,3\right[$

16.2. **b)** A função g é decrescente em $\left[-1,0\right]$ e em $\left[1,+\infty\right[$, é crescente em $\left]-\infty,-1\right]$ e em $\left[0,1\right]$, tem mínimo relativo em $x=0$ e tem um máximo relativo em $x=-1$ e em $x=0$.

17.2. **a)** A **17.2.** **b)** $T_A(t)=25+95e^{-0,033t}$; $T_B(t)=25+75e^{-0,02t}$ **1.2.** **c)** Líquido **A**

17.2. **a)** $t\approx 1091$ segundos

18.1. A previsão do cientista está correcta.

18.2. $\frac{M(t+1000)}{M(t)}\approx 0,63$; a quantidade de substância radioactiva presente em Chernobyl reduz-se, aproximadamente, 37%, a cada milénio.

18.3. $M''(t)>0$, $\forall t\geq 0$; a taxa de desintegração é crescente. No entanto a taxa de desintegração é negativo, pelo que, em módulo a taxa de desintegração decresce e portanto a quantidade de substância que se desintegra por ano está sempre a diminuir.

18.4. Em séculos, $x\approx 15$; a semivida da substância radioactiva presente em Chernobyl é, aproximadamente, quinze séculos.