



FICHAS DE TRABALHO | 12.º ANO | COMPILAÇÃO

TEMA 2 | FUNÇÕES

Site: <http://www.mathsuccess.pt>

Facebook: <https://www.facebook.com/MathSuccess>

TEMA 2

FUNÇÕES

1. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 1 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Teoremas de comparação e enquadramento para sucessões.

1.1. Sejam (u_n) a sucessão definida por $u_n = \begin{cases} \sqrt{v_n} - \sqrt{v_n+1} & \text{se } n \leq 10^6 \\ (v_n)^2 - v_n & \text{se } n > 10^6 \end{cases}$, onde (v_n) é uma sucessão de tais que $v_n \rightarrow +\infty$ e para todo o n natural, $v_n > 2$.

Utilizando o teorema de comparação para sucessões, determine o valor de $\lim u_n$.

1.2. Considere as sucessões (a_n) e (b_n) tais que $\lim a_n = -\infty$ e a partir de uma certa ordem tem-se $a_n \geq b_n$.

Qual dos seguintes não pode ser o termo geral da sucessão (b_n) ?

A $-\sqrt[4]{n^8 + 3n + 3}$

B $\frac{n^2}{\sqrt[3]{-n^5 + 3n + 1}}$

C $\frac{\sqrt{n^5 + 1}}{n^2}$

D $-\frac{2^n}{3^{-n}}$

1.3. Utilizando o teorema das sucessões enquadradas ou o teorema de comparação para sucessões, determine o valor dos seguintes limites:

a) $\lim \frac{n - \sin(n)}{n^2 + n - 1}$

b) $\lim \left(\frac{2n-1}{n+1} \right)^n$

c) $\lim \sum_{k=0}^n \sqrt{\frac{2n}{4n^3 + k}}$

d) $\lim \left(\frac{9n^2 - 1}{(2n+1)(2n-1)} \right)^{-n^2}$

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha1-ex1-novo.html>

2. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 2 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 12}{2x - 4} & \text{se } x < 2 \\ k^2 - 2k + 7 & \text{se } x = 2, \text{ com } k \in \mathbb{R} \\ \frac{3x - 6}{\sqrt{x-1} - 1} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

2.1. Determine:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, resolvendo por dois processos distintos.

d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

e) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

2.2. Qual é o valor de k para o qual a função f é contínua em \mathbb{R} .

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha2-ex1-novo.html>

3. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 3 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Sejam $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ três funções definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ \frac{x^5 - x^2}{2x^3 + 4x^2} & \text{se } x > 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2}}{x} & \text{se } x < 0 \\ -1 & \text{se } x = 0 \\ \frac{x\sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad h(x) = \sqrt{x^2 + 4}$$

3.1. Mostre que existe pelo menos um ponto, cuja abcissa pertence ao intervalo $]0,2[$, uma recta tangente ao gráfico da função h nesse ponto é paralela á recta de equação:

$$(x, y) = (-3, 1) + k(4, 2), \quad k \in \mathbb{R}$$

3.2. Numa pequena composição indique e justifique o valor lógico das seguintes proposições:

a: $f \times g$ tem um mínimo e um máximo absolutos em $[-1, 1]$.

b: Aplicando unicamente o teorema de Bolzano, é possível garantir a existência de pelo menos um zero da função $f + g$ no intervalo $]-1, \frac{1}{2}[$.

c: $\forall c \in]-2, 2[: h'(c) \neq \frac{h(2) - h(-2)}{4}$

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha3-ex1-novo.html>

4. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 4 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Considere um corpo animado de movimento rectilíneo variado e seja x a função de domínio \mathbb{R}_0^+ , definida por:

$$x(t) = \frac{t^5}{20} - \frac{t^4}{6} - \frac{t^3}{6} + t^2 + t + 1$$

Que relaciona a posição x do corpo, em metros, em função do tempo t , em segundos.

Sejam v e a , as funções que relacionam a velocidade e aceleração do corpo em função do tempo t , em segundos.

4.1. Sabe-se que a aceleração média do corpo nos primeiros t segundos foi igual a 2 m/s^2 .

Determine t . Apresente o resultado arredondado às décimas do segundo.

4.2. Determine os instantes em que a velocidade do corpo foi máxima e mínima sabendo que a função x tem um ponto de inflexão em $t = 1$.

4.3. Seja g uma função de domínio \mathbb{R} , cuja sua derivada, também de domínio \mathbb{R} , é definida por:

$$g'(t) = \begin{cases} a(t) & \text{se } t \geq 1 \\ \frac{t^3 - 2t^2 + t}{t^2 - 3t + 2} & \text{se } t < 1 \end{cases}$$

a) Indique, justificando, o valor lógico da seguinte proposição:

O teorema de Weierstrass garante a existência de máximo e mínimo da função g' no intervalo $[-1, 2]$.

b) Determine, caso exista, $g''(1)$.

c) Para $t \in]-\infty, -1[$, estude a função g quanto ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha4-ex1-novo.html>

5. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 5 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Trigonometria

5.1. Seja h a função de domínio $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, definida por $h(x) = \left(\cos x - \frac{1}{\cos x} \right)^2$.

a) Mostre que $h(x) = \operatorname{tg}^2 x \operatorname{sen}^2 x$.

b) Determine o valor exacto de $h(\operatorname{arctg}(2))$.

c) Mostre que a função h é par e admite π como período.

5.2. Considere a função g , de domínio $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$, definida por:

$$g(x) = 2\operatorname{sen}^2(\pi + x) + \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2\operatorname{tg} x \cos(2\pi - x)$$

a) Mostre que $g(x) = (\operatorname{sen} x - 1)^2$.

b) Determine as soluções da equação $4g(x) = 1$ pertencentes ao intervalo $\left] -\frac{3\pi}{2}, \pi \right]$.

c) Seja $\theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ tais que $\operatorname{tg} \theta = \frac{5}{12}$ e $g(\theta) = 1 - 5m^2$, com $m \in \mathbb{R}$.

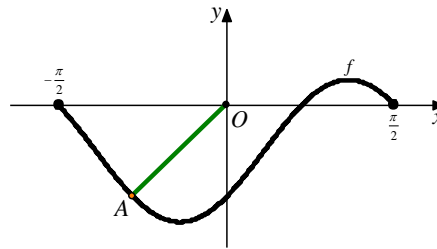
Determine o(s) valor(es) de m .

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha5-ex1-novo.html>

6. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 6 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Na figura está representado, em referencial o.n. xOy , o gráfico da função f , de domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, definida por:

$$f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \times \cos x - \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \times \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \frac{\sqrt{3} \cos^2 x}{2}$$



e um ponto A que se desloca sobre o gráfico de f .

6.1. Mostre que $f(x) = \frac{\sin(2x) + \sqrt{3} \sin^2 x - \sqrt{3}}{2}$

6.2. Seja h a função de domínio $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ que a cada valor da abcissa do ponto A faz corresponder a distância do ponto A à origem do referencial.

a) Com base no gráfico da função f comente a seguinte afirmação indicando o seu valor lógico:

“A função h tem um único zero de abcissa positiva”

b) Resolva a equação $2f(x) + \sqrt{3} \cos^2 x + 2h(0) = \sqrt{3}$.

c) Recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora determine, com arredondamento às décimas, o mínimo absoluto e o respectivo minimizante da função h . Indique todos os cálculos e gráficos utilizados.

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha6-ex1-novo.html>

7. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 7 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Seja f uma função de domínio \mathbb{R} duas vezes derivável em \mathbb{R} tais que o declive da recta tangente ao seu gráfico no ponto de abcissa $\frac{\pi}{6}$ é $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Sabe-se ainda que $f''\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

7.1. Em qual das seguintes opções estão as coordenadas de um ponto pertencente à recta tangente ao gráfico de f' , primeira derivada de f , no ponto de abcissa $\frac{\pi}{6}$?

A $(\sqrt{3}, \pi)$

B $\left(\sqrt{3}, \frac{\pi}{12}\right)$

C $\left(\frac{\pi}{6}, \sqrt{3}\right)$

D $(\pi, \sqrt{3})$

7.2. Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{6xf'(x) - 3\sqrt{3}x + 6x\pi - \pi^2}{6x^2 - \pi x}$?

7.3. Admita agora que $f(x) = \sin x$.

a) Mostre que $(-f(x) \times \cos x)' = 2\sin^2 x - 1$.

b) Estude, no intervalo $]-\pi, \pi[$ a função g , definida por $g(x) = -\frac{\sin(2x)}{2}$ quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

c) Considere a função h , definida em $\left[-\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$ definida por $h(x) = 2f(x) + g(x)$.

Estude a função h quanto ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha7-ex1-novo.html>

8. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 8 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Considere a função definida por $x(t) = A \sin(\omega t)$, com $A > 0$ e $\omega > 0$, que a cada instante t , em segundos, faz corresponder a abcissa de um ponto P que se desloca numa recta numérica.

8.1. Mostre que o sistema enunciado é um oscilador harmónico

8.2. Em relação à função $x(t) = A \sin(\omega t)$, sabe-se que:

- é solução da equação diferencial $x''(t) = -9x'(t)$

- $x\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2$

a) Determine o valores de A e de ω .

b) Determine a amplitude, pulsação e fase do oscilador harmónico.

c) Qual a frequência do oscilador harmónico?

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha8-ex1-novo.html>

9. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 9 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

O João é proprietário de um apartamento que vale 90000€ e que está no mercado de arrendamento a gerar 300€ de renda mensal.

Com as alterações à lei do arrendamento, o estado passou a taxar 35% aos valores das rendas, situação que fez o João considerar a hipótese de vender o apartamento e colocar o montante de 90000€ a render juros numa instituição bancária

Após alguma pesquisa encontrou uma proposta de depósito com juros compostos a uma taxa anual de 2,5% com capitalizações semestrais.

9.1. Qual das expressões seguintes dá o valor acumulado líquido das rendas passados n anos?

A $3180n$

B $3600n$

C $2340n$

D $1260n$

9.2. Caso o João opte pelo depósito na instituição bancária, qual o capital acumulado ao fim de:

a) um ano?

b) dois anos?

9.3. Dada a forte concorrência no mercado de arrendamento o João não consegue aumentar a renda e pretende saber se, nos próximos quatro anos, é mais rentável vender o apartamento e aplicar os 90000€ no depósito bancário ou se é preferível continuar como está. Considera que não existem outros impostos a pagar na venda da casa.

Ajuda o João a decidir fazendo um estudo do valor acumulado em quatro anos, em cada uma das situações.

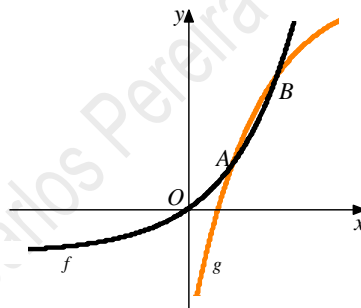
9.4. Quando o João comprou o apartamento, o seu valor era e 70000€. Para o comprar, o João deu uma entrada de 30000€ e o restante foi obtido através de um empréstimo num banco a uma taxa anual fixa de 3,5%, na modalidade de juros compostos, durante vinte e cinco anos.

De quanto foi a prestação mensal devida ao banco?

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha9-ex1-novo.html>

10. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 10 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Na figura estão representados, em referencial o.n xOy , parte do gráfico de duas funções f e g , ambas de domínio \mathbb{R} , definidas por $f(x) = 2^x - 1$ e $g(x) = 5 - 8 \times 2^{-x}$.



Sejam A e B os pontos de intersecção dos gráficos apresentados tais que a abcissa de A é menor que a abcissa de B .

10.1. Resolva, em \mathbb{R} , a inequação $(f - g)(x) < 0$.

10.2. Mostre que a equação $f(x) = g(x) + \frac{5}{2}$ tem pelo menos uma solução em $]2, 3[$.

10.3. Em qual das opções seguintes pode estar o valor de $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}} \frac{f(x) + 1 - 2\sqrt{2}}{x - \frac{3}{2}}$, com duas casas decimais?

A -1,20

B -1,96

C 0

D 1,96

10.4. Considere um ponto C , de abcissa positiva, pertencente à mediatriz do segmento de recta $[AB]$, tais que a área do triângulo $[ABC]$ é $2\sqrt{5}$.

Recorrendo à calculadora gráfica, determine a abcissa do ponto C . Apresente o resultado arredondado às centésimas.

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha10-ex1-novo.html>

11. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 11 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Considere a função f de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = e^x(x^2 - x - 2)$.

11.1. Das afirmações seguintes apenas uma é falsa, Indique-a.

- A** Os pontos A e B , de ordenada nula, cujas abcissas são respetivamente o maximizante e minimizante de f , são simétricos relativamente à recta de equação $x = -\frac{1}{2}$.
- B** O gráfico de f tem dois e só dois pontos de inflexão, um de abcissa positiva e outro de abcissa negativa
- C** O gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em \mathbb{R}^+ .
- D** $f(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 2]$

11.2. Determine:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{f(x)}{e^2(x^3 - 3x^2 + 4)} - \frac{1}{x-2} \right)$

11.3. Faça o estudo da função f relativamente à:

- a) existência de assíntotas do seu gráfico.
- b) monotonia e existência de extremos relativos.

11.4. Sejam a , b e k três números reais.

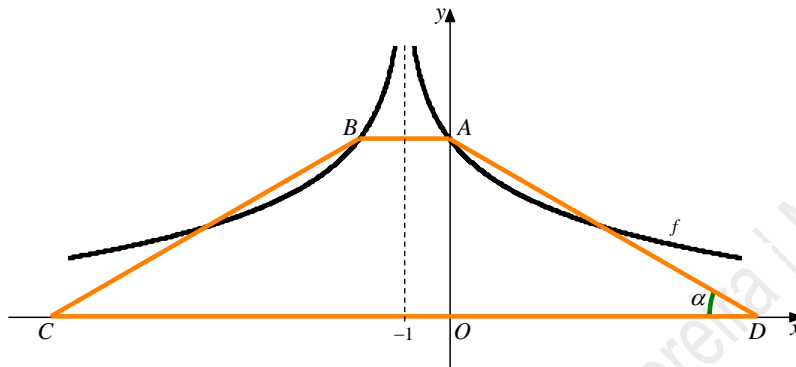
O conjunto de valores de k para os quais a equação $f(x) = k$ tem exactamente duas soluções é $]a, 0[\cup \{b\}$.

Recorrendo à calculadora gráfica determine o valores de a e de b , arredondados às centésimas.

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha11-ex1-novo.html>

12. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 12 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Na figura estão representados, em referencial o.n xOy , parte do gráfico da função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, definida por $f(x) = 6 - \ln(x^2 + 2x + 1)$ e o trapézio isósceles $[ABCD]$.



Sabe-se que:

- A é o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo Oy
- o ponto B pertence ao gráfico de f e tem ordenada igual à do ponto A
- o ponto C de abcissa negativa e o ponto D de abcissa positiva pertencem ao eixo Ox
- a área do trapézio $[ABCD]$ é $36\sqrt{3} + 12$
- α é a amplitude em radianos do ângulo CDA

12.1. Qual o valor de α ?

12.2. Mostre que $f(x) = -\ln\left(\frac{x+1}{e^3}\right)^2$

12.3. Sejam a e b dois números reais positivos tais que $\ln a = 2\ln b$.

Mostre que:

a) $f(ab - 1) = 3\ln\left(\frac{e^2}{a}\right)$

b) $f\left(\frac{a}{b} - 1\right) = 2\ln\left(\frac{e^3}{b}\right)$

12.4. Apenas uma das expressões seguintes não corresponde à expressão de uma função par. Indique-a.

A $f(x-1)$

B $f(|x|)$

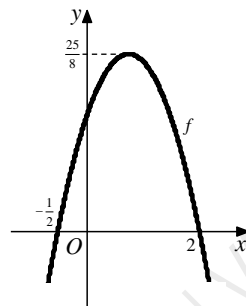
C $-f(x-1)$

D $f(x+1)$

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha12-ex1-novo.html>

13. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 13 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Na figura está representado, em referencial o.n. xOy , parte do gráfico da função f , polinomial de grau 2 e de domínio \mathbb{R} .



Tal como a figura sugere, os zeros de f são $-\frac{1}{2}$ e 2 e o seu contradomínio é $]-\infty, \frac{25}{8}]$.

Considere ainda a função g , de domínio $]2, +\infty[$, definida por $g(x) = \frac{\ln(x-2)}{x}$.

13.1. A expressão analítica de f é do tipo $ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Determine os valores de a , de b e de c .

13.2. Determine o domínio da função composta $g \circ f$.

13.3. Determine o conjunto solução das seguintes equações:

a) $(g \circ f)(x) = 0$

b) $g(e^x) = -\frac{x}{e^x}$

13.4. Considere a função h definida em \mathbb{R} por $h(x) = e^{x+m} + n$, com $m, n \in \mathbb{Z}^-$, e sejam A e B os pontos dos gráficos de g e h respectivamente, com ordenada nula.

Sabe-se que $\overline{AB} = 2$ e que $\ln\left(\frac{5}{m \times n}\right) = 0$.

Recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, determine os valores de m e de n .

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha13-ex1-novo.html>

14. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 14 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Considere a função f definida em $]1, +\infty[$ por:

$$f(x) = x \ln\left(\frac{e^2}{x-1}\right) + \ln(x-1)$$

14.1. Mostre que $f(x) = (1-x)\ln(x-1) + 2x$.

14.2. Determine:

a) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

14.3. Mostre que a função f tem um **único** zero.

14.4. Seja g a restrição da função f ao intervalo $]1, 9]$.

Utilizando métodos exclusivamente analíticos mostre que o contradomínio da função g é $\left[2\ln\left(\frac{e^9}{8^4}\right), e+2\right]$.

14.5. Seja h uma função de domínio $]1, +\infty[$ tal que:

$$e^{\frac{h(x)}{1-x}} > (x-1)e^{\frac{2x}{1-x}}$$

Determine $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha14-ex1-novo.html>

15. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 15 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Funções Logarítmicas e Exponenciais. Limites, Continuidade, Assíntotas e Derivadas.

15.1. Seja f uma função de domínio \mathbb{R} tal que:

- f é derivável em $[e, e^5]$
- f é estritamente crescente em $[e, e^5]$
- o contradomínio de f é $[2, 4]$

Qual das seguintes proposições é necessariamente verdadeira?

A $\exists c \in]e, e^5[: f''(c) = \frac{f'(e^5) - f'(e)}{e^5 - e}$

B $\forall c \in [e, e^5], f'(x) < 0$

C $\exists c \in]e, e^5[: f(c) = \ln c$

D $\exists x_1, x_2 \in [e, e^5] : x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$

15.2. Seja g a função de domínio \mathbb{R} , definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{e^{\cos x} - e}{x} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ x(\ln(x) - 2)^2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

a) Verifique se g é contínua em $x = 0$.

b) Justifique que g tem mínimo relativo em $x = 0$ e indique o seu valor.

c) Aplicando o teorema das funções enquadradas, determine $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ e aplicando o teorema de comparação para funções, determine $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

d) Mostre que $x \in \mathbb{R}^+$, $g'(x) = \ln\left(\frac{x}{e^2}\right) \times \ln x$.

e) Determine o valor do seguinte limite:

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{e}} \frac{e^{x^2-e} - 1}{2g(x) - 2g(\sqrt{e})}$$

f) Estude, em \mathbb{R}^+ , a função g quanto á monotonia e existência de extremos relativos.

g) Mostre que para $x \in \mathbb{R}^+$, o gráfico de g' tem uma única assíntota vertical e não tem assíntota não vertical.

h) Estude, em \mathbb{R}^+ , a função g quanto ao sentido das concavidades e existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

i) Determine o conjunto solução da seguinte condição:

$$g(x) = -xg'(x) \wedge -2\pi < x < 0$$

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha15-ex1-novo.html>

16. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 16 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Funções Logarítmicas e Exponenciais. Limites, Continuidade, Assíntotas e Derivadas.

16.1. Considere a função g , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $g(x) = \ln^2 x - \ln x$.

a) Determine, por definição, $g'(1)$ e escreva a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 1.

b) Determine o valor de

$$\text{b}_1) \lim_{x \rightarrow 0^+} (xg(x)) \qquad \text{b}_2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{g(x) - \ln\left(\frac{2}{e}\right) \ln 2}{x^2 - 2x}$$

c) Estude a função g quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

d) Estude a função g ao sentido das concavidades e à existência de pontos de inflexão do seu gráfico.

e) Determine o conjunto solução das seguintes inequações:

e1) $g(x) \geq 6$

e2) $g(x) - \ln^2 x < \ln(x+1) - \ln(3-x)$

16.2. Considere a função h , de domínio \mathbb{R} definida por $h(x) = x^2 e^{3-x^2}$.

a) Seja k um número positivo tal que $\ln k < 2$.

Mostre que a equação $h(x) = x + k$ é possível em $[-1, 0]$.

b) Mostre que $h'(x) = 2xe^{3-x^2}(1-x^2)$ e estude a função h quanto à monotonia e a existência de extremos relativos.

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha16-ex1-novo.html>

17. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 17 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Segundo a Lei do arrefecimento/aquecimento de um corpo descrita por Newton a temperatura de um corpo num dado instante t é dada pelo seguinte modelo exponencial:

$$T(t) = (T_0 - T_a)e^{-kt} + T_a, \text{ com } t \geq 0$$

onde T é a temperatura, em graus Celsius num dado instante t , em minutos, T_0 é a temperatura inicial, T_a é a temperatura ambiente e k é a constante de arrefecimento/aquecimento.

17.1. Mostre que $k = \ln \left(\frac{T_0 - T_a}{T - T_a} \right)^{\frac{1}{t}}$.

17.2. Considere dois líquidos, **A** e **B**, respectivamente, com constantes de arrefecimento k_A e k_B , e cujas temperaturas, respectivamente, T_A e T_B , são dadas pela Lei do arrefecimento/aquecimento de Newton.

Sabe-se que:

- $\lim_{t \rightarrow +\infty} T_A(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} T_B(t) = 25$

- a temperatura inicial do líquido **A** é de 120 °C e trinta minutos depois desse instante inicial a sua temperatura diminuiu 50%
- a temperatura inicial do líquido **B** é de 100 °C e vinte minutos depois desse instante inicial a sua temperatura diminuiu 25%

a) Utilizando os valores de k_A e de k_B arredondados às milésimas, qual é o valor $\frac{k_A}{k_B}$?

A 1,65

B 1,35

C 0,65

D 0,35

b) Escreva as expressões analíticas de T_A e T_B .

c) Qual dos líquidos tem maior taxa de arrefecimento nos primeiros quatro minutos? Justifique.

d) Existe um instante, após o inicial, em que as temperaturas dos dois líquidos são iguais.

Determine esse instante.

Apresente o resultado em segundos, arredondado às unidades.

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha17-ex1-novo.html>

18. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 18 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Na madrugada de 26 de Abril de 1986, ocorreu o que foi classificado como "pior desastre nuclear da história". Um dos quatro reactores da planta de Chernobyl, na Ucrânia, explodiu e causou um incêndio que libertou cerca de sete toneladas de substâncias radioactivas para a atmosfera.

Depois do acidente, por razões de segurança, foi decretada uma zona inabitada de 2600 km^2 ao redor da planta nuclear até que a massa de substâncias radioactivas libertadas se reduzisse a 0,01%. Ainda hoje essa zona não pode ser habitada e assim será por longos anos.

Segundo um modelo exponencial apropriado, a massa de substâncias radioactivas M , em gramas, existente na área de Chernobil, t anos após o instante da explosão, é dada por:

$$M(t) = 7 \times 10^6 \times e^{-4,6 \times 10^{-4} t}, \text{ com } t \geq 0$$

18.1. Um cientista prevê que a zona de Chernobil volta a ser habitável no ano 22008.

Verifique se a previsão do cientista está correcta de acordo com o modelo exponencial apresentado.

18.2. Determine o valor de $\frac{M(t+1000)}{M(t)}$ e interprete o seu significado no contexto do problema.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

18.3. Justifique se a taxa de desintegração da substância radioactiva aumenta ou diminui ao longo dos anos.

18.4. Determine o valor de x para o qual $2 \times M(t+x) = M(t)$ e interprete o resultado no contexto do problema.

Apresente o resultado em séculos, arredondado às unidades.

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha18-ex1-novo.html>

Solucionário

1.1. $+\infty$

1.2. C

1.3. a) 0

1.3. b) $+\infty$

1.3. c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

1.3. d) 0

2.1. a) $-\infty$

2.1. b) $\frac{3}{2}$

2.1. c) $+\infty$

2.1. d) 6

2.1. e) 6

2.2. $k=1$

3.2. V, F, F

4.1. $t \approx 3,3$ s

4.2. A velocidade é máxima em $t=1$ e mínima em $t=0$ e em $t=2$.

4.3. a) Verdadeira

4.3. b) Não existe

4.3. c) Para $t \in]-\infty, -1[$ o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo em $[2-\sqrt{2}, 1[$, tem a concavidade voltada para cima em $] -\infty, 2-\sqrt{2}]$ e tem ponto de inflexão em $x = 2 - \sqrt{2}$.

5.1. b) $\frac{16}{5}$

5.2. b) $\left\{-\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

5.2. c) $m = -\frac{\sqrt{21}}{13} \vee m = \frac{\sqrt{21}}{13}$

6.2. a) Falsa. A função h nunca tem zero pois o ponto A nunca coincide com a origem do referencial.

6.2. b) $\left\{-\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}\right\}$

6.2. c) Mínimo absoluto: $\approx 0,5$; minimizante: $\approx 0,4$

7.1. B

7.2. $\frac{11}{2}$

7.3. b) No intervalo $]-\pi, \pi[$, a função g é decrescente em $]-\pi, -\frac{3\pi}{4}]$, em $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$ e em $[\frac{3\pi}{4}, \pi[$, é crescente em $[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}]$ e em $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$, tem mínimo relativo em $x = -\frac{3\pi}{4}$ e em $x = \frac{\pi}{4}$ e tem máximo relativo em $x = -\frac{\pi}{4}$ e em $x = \frac{3\pi}{4}$.

7.3. c) No intervalo $[-\frac{\pi}{2}, 2\pi]$, o gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo em $[-\frac{\pi}{3}, 0]$, em $[\frac{\pi}{3}, \pi]$ e em $[\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$, tem a concavidade voltada para cima em $[-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}]$, em $[0, \frac{\pi}{3}]$ e em $[\pi, \frac{5\pi}{3}]$ e tem pontos de inflexão em $x = -\frac{\pi}{3}$, em $x = 0$, em $x = \frac{\pi}{3}$, em $x = \pi$ e em $x = \frac{5\pi}{3}$.

8.2. a) $A = 2$ e $\omega = 3$

8.2. b) Amplitude: $A = 2$; Pulsação: $\omega = 3$; Fase: $\varphi = \frac{\pi}{2}$

8.2. c) Período: $T = \frac{2\pi}{3}$; Frequência: $\frac{1}{T} = \frac{3}{2\pi}$

9.1. C

9.2. a) 92264,06€

9.2. b) 94585,08€

9.3. Passados quatro anos o João recebe 9360€ de renda. Se optar pelo depósito recebe 9403,75€. É preferível vender a casa e optar pelo depósito.

9.4. 315,10€

10.1. $]1,2[$

10.3. D

10.4. $A_{[ABC]} = \frac{\sqrt{5((c-1,5)^2 + (-0,5c+0,75)^2)}}{2}$, onde c é a abcissa de C . $A_{[ABC]} = 2\sqrt{5} \Leftrightarrow c = c_0$, onde $c_0 \approx 5,08$.

11.1. C

11.2. a) $+\infty$

11.2. b) 0

11.2. c) 1

11.3. a) A.V: não tem; A.H.: $y = 0$, quando $x \rightarrow -\infty$; quando $x \rightarrow +\infty$, o gráfico de f não tem assíntota.

11.3. b) A função f é decrescente em $[-\frac{1+\sqrt{13}}{2}, -\frac{1-\sqrt{13}}{2}]$, é crescente em $]-\infty, -\frac{1+\sqrt{13}}{2}]$ e em $[-\frac{1-\sqrt{13}}{2}, +\infty[$, tem mínimo relativo em $x = -\frac{1+\sqrt{13}}{2}$ e tem máximo relativo em $-\frac{1-\sqrt{13}}{2}$.

11.4. $a \approx -5,91$ e $b \approx 0,56$

12.1. $\frac{\pi}{6}$

12.4. D

13.1. $a = -2$, $b = 3$ e $c = 2$

13.2. $D_{g \circ f} = \left]0, \frac{3}{2}\right[$

13.3. a) $\left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$

13.3. b) $\{\ln(1+\sqrt{2})\}$

13.4. $m = -5$ e $n = -1$

