FICHAS DE TRABALHO | 12.º ANO | COMPILAÇÃO

TEMA 1 | COMBINATÓRIA E PROBABILIDADES

Site: http://www.mathsuccess.pt

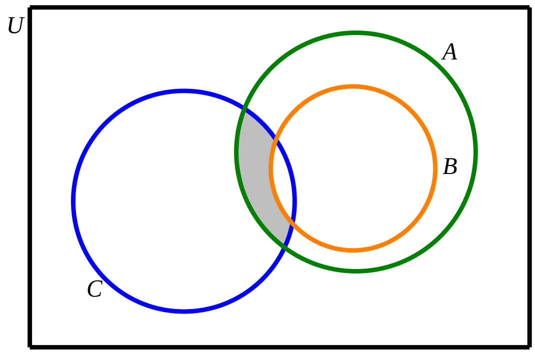
Facebook: https://www.facebook.com/MathSuccess

TEMA 1

COMBINATÓRIA E PROBABILIDADES

1. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 1 | Tema 1 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Na figura estão representados os subconjuntos A, B e C de um universo U. Tal como a figura sugere, $B \subset A$.



1.1. Mostre que a região sombreada da figura representa o conjunto $A \setminus \bar{C} \cap \left(\bar{B} \cup \bar{A}\right)$.

1.2. Mostre, por dupla inclusão, que $(A \cup B) \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema1-ficha1-ex1-novo.html

2. (Exercício n.º 2 | Ficha de Trabalho n.º 1 | Tema 1 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Operações Sobre Conjuntos. Leis de De Morgan. Produto Cartesiano.

2.1. Sejam A e B dois conjuntos tais que:

- os pares ordenados $(0,0)$, $(1,2)$ e $(4,3)$ são elementos de $A \times B$
- $A \cap B = \{0,4,5\}$

Qual das afirmações é necessariamente verdadeira?

A $A \times B$ tem no máximo vinte elementos.

B $A \times B$ tem exactamente vinte elementos.

C $A \times B$ tem pelo menos vinte elementos.

D $A \times B$ tem mais de vinte elementos.

2.2. Sejam A ,B e C três subconjuntos de um universo $U=\left\{x\in\mathbb{Z}_0^+ : x^2>9 \Rightarrow x^2-8x=-16\right\}$ tais que:

- $A\cup B=U$ e $A\cap B=\{1\}$
- A tem exactamente dois elementos
- $(0,2)\in A\times B$
- $A\subset C$ e $B\setminus C=\{2,3\}$

Determine em extensão os seguintes conjuntos:

a) $B\setminus\bar{C}\cup(A\cap B)$

b) $\left(A\cup(A\cap B)\right)\times\left(\bar{B}\cup\bar{C}\right)$

2.3. Sejam A, B e C três subconjuntos de um universo U, tai que $\overline{A\cap(B\cup C)}=U$.

Mostre que $A\setminus\left(A\cap\bar{B}\cap\bar{C}\right)=\varnothing$.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema1-ficha1-ex2-novo.html

3. (Exercício n.º 3 | Ficha de Trabalho n.º 1 | Tema 1 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Uma equipa de ginástica acrobática é constituída por quinze ginastas. Cada ginasta equipa de uma única cor: cinco de preto, cinco de vermelho e cinco de amarelo.

Para facilitar a avaliação por parte do júri, as ginastas estão identificadas com um único número, de 1 a 15. Um número diferente por cada ginasta. As idades das ginastas variam entre os 16 e os 21 anos, inclusive.

Considere os conjuntos:

- $P=\{\text{números das ginastas que equipam de preto}\}$
- $V=\{\text{números das ginastas que equipam de vermelho}\}$

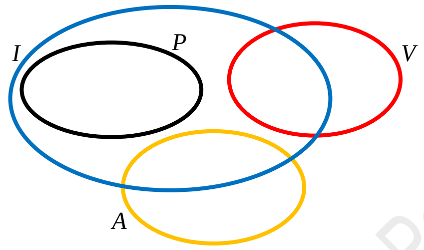
- $A = \{\text{números das ginastas que equipam de amarelo}\}$

- $I = \{\text{números das ginastas com 17, 18 ou 19 anos}\}$

Sabe-se que o número da ginasta mais nova é o 12 e que:

$$I \cap \overline{V} \cap \overline{A} = \{3,5,7,9,10\}, \qquad V \setminus \left(V \cap \overline{I}\right) = \{1,2,4,6\} \qquad \text{e} \qquad \overline{P} \cap \overline{V} \cap \overline{I} = \{8,11\}$$

3.1. Complete o diagrama de Venn da imagem e responda às seguintes questões:



a) Qual a cor do equipamento da ginasta mais nova?

b) Quantas ginastas equipadas de amarelo existem com idade inferior ou igual a 19 anos?

3.2. Mostre que $(P \cup I) \cap \left(\overline{\overline{V} \cap \overline{I}}\right) \cap (A \cup I) = I$

3.3. Defina em extensão o conjunto $(I \cap V) \times (I \cap A)$.

3.4. Quantos elementos tem o conjunto $I \times P$?

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema1-ficha1-ex3-novo.html

4. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 2 | Tema 1 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

A Laura tem alguns de CD's de música, entre os quais tem de quatro géneros: Rock, Pop, Clássica e Jazz.

Sabe-se que:

- os CD's são todos distintos entre si;

- a Laura tem mais três CD's de música Pop do que de música Rock;

- a Laura tem três CD's de música Clássica e o dobro de CD's de música Jazz.

Sejam n, com $n \in \mathbb{N}$, o número de CD´s de música Rock e R, P, C e J, respectivamente os conjuntos de CD's de Rock, Pop, Clássica e Jazz.

4.1. Mostre que $\#\left(R\times P\times C\times J\right)=18n^2+54n$.

4.2. A Laura vai de férias com os avós e pretende levar alguns CD's.

a) O número de maneira de a Laura levar quatro CD's, um de música Rock, um de música Pop, um de música Clássica e um de música Jazz é 504.

Mostre que $n=4$.

b) De quantas maneiras distintas pode levar três CD's de três tipos distintos?

c) A Laura quer levar três CD's para as férias, um de musica Rock e um de música Clássica, mas está indecisa entre levar um música Pop ou um de música Jazz.

Quantas escolhas distintas pode fazer?

d) Determine $\#\left(R\cup P\right)\times J$ e interprete o resultado no contexto da situação descrita.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema1-ficha2-ex1-novo.html

5. (Exercício n.º 2 | Ficha de Trabalho n.º 2 | Tema 1 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Um saco contém n bolas numeradas de 1 a n, com $n\in\mathbb{N}$. As bolas com número ímpar são brancas e as bolas com número par são pretas.

Considere os conjuntos $B=\{\text{bolas brancas}\}$ e $P=\{\text{bolas numerada com um número primo}\}$ tais que:

- $\#B+\#P=n$
- $\#\left(\overline{B}\cup P\right)=11$

5.1. Quantas bolas estão no saco?

5.2. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

A B e P são equipotentes.

B $\overline{B}$ e $\overline{P}$ são equipotentes.

C B e $\overline{P}$ são equipotentes.

D $\overline{B}$ e B são equipotentes.

5.3. Qual o valor de $\#\left(B\times P\right)+\#\left(B\cap\overline{P}\right)$?

5.4. Para cada um dos pares ordenados que são elementos do conjunto $\overline{B}\times\overline{P}$, considere o produto entre os números que o formam.

Cada um desses produtos é registado num papel. Em cada papel é feito o registo de um único produto.

a) Quantos papéis são necessários?

b) Quantos desses papéis têm registado um quadrado perfeito?

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema1-ficha2-ex2-novo.html

6. (Exercício n.º 3 | Ficha de Trabalho n.º 2 | Tema 1 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Sejam A, B e C três subconjuntos de um universo U, e n um número natural tais que:

- $A\cap(B\cup C)\cup(B\cap C)=\varnothing$
- $\#U=3n+10$
- $\#A=n$, $\#B=n+2$ e $\#C=n+1$

6.1. Justifique que $\#\left(A\cup\overline{B}\right)=\#\overline{B}$.

6.2. Qual é o valor de $\#\left(\overline{A\cup B\cup C}\right)$?

A 6

B 7

C 8

D 9

6.3. Sabendo que $\#\left(\left(\overline{\overline{A}\cap C}\right)\times B\right)=33$, determine o valor de n.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema1-ficha2-ex3-novo.html

7. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 3 | Tema 1 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Uma colecção de louças de porcelana contém três jarras exactamente iguais, seis pratos exactamente iguais e mais oito peças, todas distintas.

7.1. Colocando todas as peças numa só fila, quantas disposições distintas podem ser formadas?

7.2. Colocando todas as peças numa só fila, quantas disposições distintas podem ser formadas de modo que as jarras fiquem juntas numa das pontas e os pratos fiquem em lugares consecutivos?

7.3. A Colecção vai ser exposta num museu e para tal vai ser arrumada numa caixa para ser transportada.

A caixa tem vinte compartimentos e em cada um deles vai ser colocada apenas uma peça.

De quantas maneiras distintas podem ser dispostas as peças na caixa?

Nota: a troca de posições entre peças iguais não forma uma disposição diferente.

7.4. Entre as oito peças distintas, algumas são chávenas.

Colocando estas oito peças numa só fila, o número de maneiras de as chávenas ficarem em posições consecutivas é 2880.

Quantas são as chávenas?

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema1-ficha3-ex1-novo.html

8. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 4 | Tema 1 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Considere que em cima de uma mesa estão k cartões, com $k \in \mathbb{N}$. Em cada um dos cartões está escrito um número natural.

Sabe-se que os números dos cartões correspondem aos elementos das n primeiras linhas do Triângulo de Pascal.

Existem portanto cartões com o mesmo número.

8.1. Mostre que:

a) $k = \dfrac{n^2 + n}{2}$

b) a soma dos k números naturais é dada, em função de n, por $2^n - 1$.

c) se o terceiro elemento da n-ésima linha for 171, quantos cartões estão em cima da mesa?

8.2. Considere agora que $n = 5$.

a) Utilizando apenas cartões com um número par:

a₁) quantos números de quatro algarismos se conseguem formar?

a₂) quantos números de três algarismos se conseguem formar?

b) Utilizando todos os cartões, quantos números ímpares se podem formar?

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema1-ficha4-ex1-novo.html

9. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 5 | Tema 1 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Triângulo de Pascal. Binómio de Newton.

9.1. Seja n, com $n \geq 2$, o penúltimo elemento de uma linha do Triângulo de Pascal.

Sabe-se que:

- ${}^{n}C_{p} = 11628$
- $\sum_{k=0}^{2} {}^{n-2}C_{p-k} = 9248$

Sem recorrer à calculadora, determine o valor de ${}^{n-2}C_{p-1}$.

9.2. No desenvolvimento de $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{n}$, com $x>0$ e $n \in \mathbb{N}$, sabe-se que a parte literal do termo cujo coeficiente binomial é o elemento central da linha n do triangulo de Pascal é x^{-5}.

a) Determine o valor de n e a soma dos coeficientes binomiais do desenvolvimento.

b) Determine coeficiente binomial do termo cuja parte literal é x^{4}.

c) Justifique que o desenvolvimento não tem termo independente.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema1-ficha5-ex1-novo.html

10. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 6 | Tema 1 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Considere a experiência aleatória que consiste em lançar n vezes, com $n \in \mathbb{N}$, um dado cúbico e equilibrado com as faces numeradas de 1 a 6 e registar o número da face que fica voltada para cima em cada lançamento.

10.1. Considere a experiência descrita para $n=3$.

Qual a probabilidade de a soma dos três lançamentos ser ímpar e menor que 10 e os números serem todos distintos?

A $\frac{1}{9}$ **B** $\frac{1}{54}$ **C** $\frac{1}{12}$ **D** $\frac{1}{6}$

10.2. Considere a experiência descrita para $n = 4$.

Em cada um dos quatro lançamentos, se o número registado for superior a 2 escolhe-se, aleatoriamente, uma vogal da palavra **MATHSUCCESS**. Caso contrário escolhe-se uma consoante.

Qual a probabilidade de no final dos quatro lançamentos haver exactamente duas vogais?

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

10.3. Considere a experiência descrita para $n = 4$.

Sejam r e s as rectas definidas por:

$$s:(x,y)=(-3,-9)+k(4,12),\ k\in\mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad r:\begin{cases} x=1+k \\ y=2+2k \end{cases},\ k\in\mathbb{R}$$

Seja $T(x,y)$ um ponto do plano, tais que x e y são os números das faces saídas no primeiro e segundo lançamento, respectivamente.

Qual a probabilidade de o ponto T pertencer à recta r ou à recta s? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema1-ficha6-ex1-novo.html

11. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 7 | Tema 1 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Regra de Laplace. Probabilidades. Probabilidade Condicionada.

11.1. Sejam $(E,\mathcal{P}(E),P)$ um espaço de probabilidade e $A,B\in\mathcal{P}(E)$ dois acontecimentos possíveis tais que:

- $A\cap\overline{B}=\varnothing$
- $P(A)\times P(B)-0,25(P(B))^2=0$

Qual é o valor de $P\left(\overline{A\cap B}\,|\,B\right)$?

A $\frac{1}{4}$ **B** $\frac{1}{2}$ **C** $\frac{3}{4}$ **D** 1

11.2. No dia 24 de Setembro o número de alunos do sexo feminino inscritos no **MATHSUCCESS** foi o dobro de alunos inscritos do sexo masculino.

Sabe-se ainda que seleccionando simultaneamente e ao acaso três desses alunos, a probabilidade de pelo menos um deles ser do sexo masculino é $\frac{67}{91}$.

Determine o número de alunos inscritos no **MATHSUCCESS** no dia 24 de Setembro.

11.3. Seleccionando um aluno inscrito ao acaso, sabe-se que a probabilidade de:

- um ser rapaz da turma do $12.^\circ$ ano é igual á probabilidade de ser uma rapariga da turma do $11.^\circ$ ano;
- ser rapaz ou da turma do $11.^\circ$ ano é igual a 50%.

Escolhendo ao acaso um aluno da turma do 11.º ano, qual é a probabilidade de ser rapaz?

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema1-ficha7-ex1-novo.html

12. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 8 | Tema 1 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

O João, o Pedro e a Maria são três amigos que nasceram no ano 2001. Foi-lhes pedido para registarem, aleatoriamente, um dia desse ano (dia e mês).

Considere os acontecimentos A e B definidos por:

A: «os três amigos escolheram o mesmo dia»

B: «os três amigos escolheram o mesmo mês»

12.1. Determine:

a) $P(A)$ **b)** $P(B)$

c) $P(A|B)$ **d)** $P(B|A)$

Não efectue os cálculos, apresente apenas as expressões que permitem determinar as probabilidades pedidas.

12.2. Os acontecimentos A e B são independentes? Justifique.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema1-ficha8-ex1-novo.html

13. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 9 | Tema 1 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

Em cima de uma mesa estão dois baralhos de cartas iguais, o baralho **A** e o baralho **B**. Cada baralho é composto por 52 cartas repartidas por quatro naipes, treze pretas de paus, treze pretas de espadas, treze vermelhas de ouros e treze vermelhas de copas. Cada naipe tem três figuras, uma ás e as restantes cartas numeradas de 2 a 10.

Considere que se retira aleatoriamente uma carta do baralho **A**. Se a carta retirada for um **ás** coloca-se esse **ás** no baralho **B**, se a carta retirada não for um **ás** retira-se a carta igual a essa, do baralho **B** para o baralho **A**.

Após este procedimento retira-se aleatoriamente uma carta do baralho **B** e observa-se a carta retirada.

Considere os acontecimentos:

A: «a carta retirada do baralho **A** é um **ás**»

B: «a carta observada no final é vermelha»

C: «a carta observada no final é uma figura»

D: «a carta observada no fim é um ás»

13.1. Determine:

a) $P\left((B \cap C)|A\right)$ Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

b) $P\left((B \cap D)|\bar{A}\right)$ Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

c) $P(D)$ Apresente o resultado na forma de dízima com quatro casas decimais.

13.2. Considere agora que se juntam os dois baralhos ficando as 104 cartas misturadas. Seleccionam-se, sucessivamente e sem reposição, duas cartas.

Sejam E e F os acontecimentos:

E: «as duas cartas seleccionadas são iguais»

F: «a primeira carta retirada não é o **ás** de paus»

Os acontecimentos E e F são independentes? Justifique.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema1-ficha9-ex1-novo.html

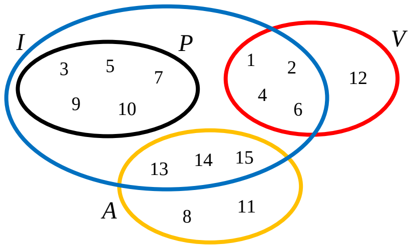
Solucionário

2.1. C

2.2. **a)** $\{1,4\}$

2.2. **b)** $\{(0,0);(0,2);(0,3);(1,0);(1,2);(1,3)\}$

3.1.



3.1. **a)** Vermelho

3.1. **b)** Três

3.3. $\{(1,13);(1,14);(1,15);(2,13);(2,14);(2,15);(4,13);(4,14);(4,15);(6,13);(6,14);(6,15)\}$

3.4. 60

4.2. **b)** 450

4.2. **c)** 156

1.2. **d)** $\#(R\cup P)\times J=66$; é um número de maneiras de a Laura escolher dois CD's para levar para férias, um de música Rock ou um de música Pop e um de música Jazz.

5.1. 13

5.2. C

5.3. 44

5.4. **a)** 42

5.4. **b)** 8

6.2. B

6.3. $n=1$

7.1. 82335052800

7.2. 725760

7.3. 93861960192000

7.4. Quatro ou cinco.

8.1. **c)** 210

8.2. **a1)** 12

8.2. **a2)** 12

8.2. **b)** 660660

9.1. 2380

9.2. **a)** $n=20$; $2^{20}=1048576$

9.2. **b)** ${}^{20}C_4=4845$

10.1. A

10.2. $\frac{8}{27}$

10.3. $\frac{5}{36}$

11.1. C

11.2. 15

11.3. $\frac{1}{2}$

12.1. **a)** $\frac{365\times1\times1}{365^3}$

12.1. **b)** $\frac{7\times31^3+4\times30^3+28^3}{365^3}$

12.1. **c)** $\frac{365\times1\times1}{7\times31^3+4\times30^3+28^3}$

12.1. **d)** 1

12.2. Não são independentes pois $P(A|B)\neq P(A)$.

13.1. **a)** $\frac{6}{53}$

13.1. **b)** $\frac{2}{51}$

13.1. **b)** $\approx 0{,}0797$

13.2. São independentes pois $P(E|F)=P(E)$