



FICHAS DE TRABALHO | 11.º ANO | COMPILAÇÃO

TEMA 4 | FUNÇÕES

Site: <http://www.mathsuccess.pt>

Facebook: <https://www.facebook.com/MathSuccess>

TEMA 4

FUNÇÕES

2016 – 2017

1. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 1 | Tema 4 | 11.º Ano | 2016 – 2017)

Sejam f e g duas funções tais que:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \frac{x^2 + 1}{x} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g:]-\infty, 5] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \sqrt{5-x} \end{aligned}$$

1.1. Considere a função h definida em \mathbb{R} por

$$h(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x \leq 0 \\ f(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Utilizando definição de Heine, mostre que não existe $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$.

1.2. Determine, caso exista:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) \times g(x))$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} (g \circ f)(x)$

1.3. Mostre que não existe $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x-4|}{g(x)-1}$.

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-11-ano/Tema4-ficha1-ex1.html>

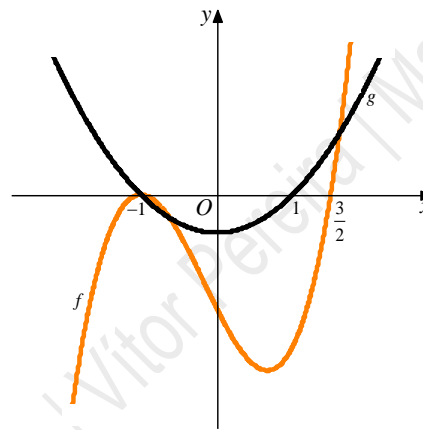
2. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 2 | Tema 4 | 11.º Ano | 2016 – 2017)

Na figura estão representadas partes dos gráficos de duas funções f e g de domínio \mathbb{R} , tais que:

- f é uma função polinomial de grau 3 e $f(-1) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

- g é uma função quadrática que se anula em $x = -1$ e em $x = 1$

Determine, caso exista:



2.1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{f(x)}$

2.2. $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{g(x)}$

2.3. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{g(x)}$

2.4. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{g(x)}$

2.5. $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{g(x)}{f(x)}$

2.6. $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{g(x)}{f(x)}$

2.7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)}$

2.8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

2.9. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{f(x)}$

2.10. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-11-ano/Tema4-ficha2-ex1.html>

3. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 3 | Tema 4 | 11.º Ano | 2016 – 2017)

Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2 - 12}{2x - 4} & \text{se } x < 2 \\ k^2 - 2k + 7 & \text{se } x = 2, \text{ com } k \in \mathbb{R} \\ \frac{3x - 6}{\sqrt{x - 1} - 1} & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

1.1. Determine:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, resolvendo por dois processos distintos.

d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

e) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$

1.2. Qual é o valor de k para o qual a função f é contínua em \mathbb{R} .

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-11-ano/Tema4-ficha3-ex1.html>

4. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 4 | Tema 4 | 11.º Ano | 2016 – 2017)

Seja f uma função de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, ímpar e contínua em todos os pontos do seu domínio, tais que:

- $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$

4.1. Indique a opção verdadeira. O gráfico de f :

- A** tem duas e apenas duas assíntotas distintas. **B** tem três e apenas três assíntotas distintas.
- C** tem quatro e apenas quatro assíntotas distintas. **D** não tem assíntotas.

4.2. Determine:

a) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$

4.3. Considere a expressão $x + \frac{x}{x^2 - 9}$.

a) Mostre que $x + \frac{x}{x^2 - 9}$ pode ser a expressão analítica da função f .

b) Admitindo que $f(x) = x + \frac{x}{x^2 - 9}$, determine o conjunto solução da inequação $f(x) < 0$.

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-11-ano/Tema4-ficha4-ex1.html>

5. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 5 | Tema 4 | 11.º Ano | 2016 – 2017)

Funções Racionais. Derivadas.

5.1. A recta de equação $y = 2x - 6$ é tangente ao gráfico de uma função g , de domínio \mathbb{R} , no ponto de abcissa 3.

Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)}{x^2 - 9}$?

A $\frac{1}{6}$

B $\frac{1}{4}$

C $\frac{1}{3}$

D $\frac{1}{2}$

5.2. Sejam f uma função de domínio \mathbb{R} e a um número real não nulo tais que $t.v.m._{[a,3a]}(f) = 4$ e $t.v.m._{[3a,6a]}(f) = 5$. Qual é o valor de $t.v.m._{[a,6a]}(f)$?

A $\frac{19}{5}$

B $\frac{23}{5}$

C $\frac{27}{5}$

D $\frac{31}{5}$

5.3. Considere a função h , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{b\}$, definida por $h(x) = a + \frac{b}{x-b}$, com $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tal que $h(2b) = 3$.

a) Mostre que $a = 2$.

b) Considere agora que a recta de equação $x + 3 = 0$ é assíntota vertical do gráfico de h .

b₁) Determine o conjunto solução da inequação $2h(x) \leq 2x - 3$.

b₂) Determine, por definição, $h'(-1)$?

b₃) Seja t a recta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa -1 .

Determine a área do triângulo $[AOB]$, onde:

- A é o ponto de intersecção da recta t com o eixo Ox
- B é o ponto de intersecção do gráfico de h com o eixo Oy
- C é o ponto de intersecção da recta t com o eixo Oy

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-11-ano/Tema4-ficha5-ex1.html>

6. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 6 | Tema 4 | 11.º Ano | 2016 – 2017)

Sejam g e h as funções de domínios $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ e \mathbb{R} , respectivamente, definidas por:

$$g(x) = \frac{2x+1}{x+3} \quad \text{e} \quad h(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x - 3$$

6.1. Determine, por definição, $h'(-2)$.

6.2. O gráfico da função g tem dois pontos onde a recta tangente é perpendicular à recta de equação $x = -5y$.

Determine as coordenadas desses pontos.

6.3. Determine o contradomínio de g e caracterize a função inversa da função $g : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{2\}$, justificando primeiro que é bijectiva.

6.4. Considere a função $g \times h$.

a) Mostre que $(g \times h)(x) = (2x+1)^2(x-1)$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

b) Mostre que $(g \times h)'(x) = 3(4x^2 - 1)$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ e estude a função $g \times h$ quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

6.5. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$, definida por $f(x) = g(x)(x-7)$.

a) Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

Caso existam, indique as suas equações.

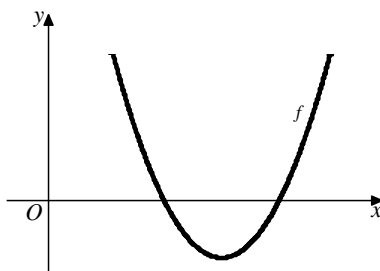
b) Estude a função f quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-11-ano/Tema4-ficha6-ex1.html>

7. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 7 | Tema 4 | 11.º Ano | 2016 – 2017)

Derivadas. Teorema de Lagrange.

7.1. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy , uma parábola que é o gráfico de uma função f , de domínio \mathbb{R} .



Seja f' a primeira derivada de f . Qual das seguintes pode ser a expressão analítica de f' ?

A $2x + 6$

B $-2x + 6$

C $2x - 6$

D $-2x - 6$

7.2. Considere uma função f , derivável em \mathbb{R} , tais que $f(-2) = f(1) = 3$ e $f(4) = -3$.

Qual das seguintes afirmações não é necessariamente verdadeira?

A $\exists c \in]-2, 1[: f'(c) = 0$

B $\exists c \in]1, 4[: f'(c) = -2$

C $\exists c \in]-2, 4[: f'(c) = -1$

D $\exists c \in]1, 4[: f'(c) = 0$

7.3. Seja h a função de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ tais que $h(3) = 6$, cuja derivada, também de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, é definida

por $h'(x) = x^2 + \frac{9}{x^2}$.

a) Justifique que h é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) Determine $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2h(x) - 12}{h(x)(x^2 - 9)}$.

c) Estude a função h quando à monotonia e à existência de extremos relativos.

d) Considere agora que $h(x) = \frac{bx^4 - 27}{ax}$, com $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Determine a e b .

e) Seja g a função de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definida por $g(x) = h'(x)$.

Estude a função g quando à monotonia e à existência de extremos relativos.

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-11-ano/Tema4-ficha7-ex1.html>

8. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 8 | Tema 4 | 11.º Ano | 2016 – 2017)

Derivadas. Optimização

8.1. Sejam f , g e h três funções tais que:

- a função f tem domínio \mathbb{R} , $f(2) = 4$ e $f'(2) = 2$
- a função g tem domínio $[-2, +\infty[$ e é definida por $g(x) = x\sqrt{x+2}$
- a função h tem domínio $] -2, +\infty[\setminus \{0\}$ e é definida por $h(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$

a) Determine, por definição, $g'(1)$.

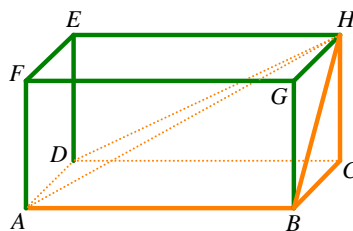
b) Estude a função g quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

c) Escreva a equação reduzida da recta perpendicular à recta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 2.

8.2. Na figura estão representados o prisma recto $[ABCDEFGH]$ e a pirâmide recta $[ABCDE]$ cujo volume é 8.

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 2\overline{BC}$
- $[ABCD]$ é um rectângulo



Seja x a medida do comprimento do lado $[BC]$, com $x > 0$.

- a) Mostre que a área total do prisma $[ABCDEFGH]$ é dada em função de x por $A(x) = 4x^2 + \frac{72}{x}$.
- b) Determine a área total mínima que o prisma $[ABCDEFGH]$ pode tomar.

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-11-ano/Tema4-ficha8-ex1.html>

Solucionário

1.2. a) $-\infty$

1.2. b) $\sqrt{3}$

2.1. 0

2.2. $-\infty$

2.3. $+\infty$

2.4. 0

2.5. $+\infty$

2.6. $-\infty$

2.7. 0

2.8. $+\infty$

2.9. 0

2.10. $-\infty$

3.1. a) $-\infty$

3.1. b) $\frac{3}{2}$

3.1. c) $+\infty$

3.1. d) 6

3.1. e) 6

3.2. $k = 1$

4.1. B

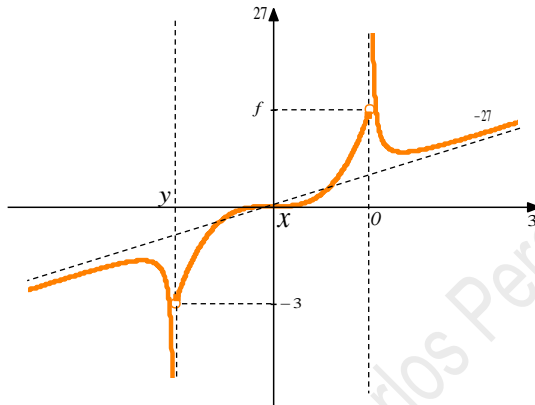
4.2. a) $-\infty$

4.2. b) 1

4.3. b)

4.3. b) $]-\infty, -3[\cup]-2\sqrt{2}, 0[\cup]2\sqrt{2}, 3[$

4.4.



5.1. C

5.2. B

5.3. b₁) $]-3, -\frac{5}{2}] \cup [3, +\infty[$

5.3. b₂) $g'(-1) = \frac{3}{4}$

5.3. b₃) $A_{[ABC]} = \frac{5}{24}$

6.1. $h'(-2) = 0$

6.2. $(-2, -3)$ e $(-4, 7)$

6.3. $g^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ tal que $g^{-1}(x) = \frac{3x-1}{2-x}$

6.4. b) A função $g \times h$ é decrescente em $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, é crescente em $]-\infty, -3[$ em $]-3, -\frac{1}{2}[$ e em $[\frac{1}{2}, +\infty[$, tem mínimo relativo em $x = \frac{1}{2}$ e tem máximo relativo em $x = -\frac{1}{2}$.

6.5. a) A.V.: $x = -3$; A.O.: $y = 2x - 19$, quando $x \rightarrow \pm\infty$;

6.5. b) A função f é decrescente em $[-8, -3[$ e em $]-3, 2]$, é crescente em $]-\infty, -8]$ e em $[2, +\infty[$, tem mínimo relativo em $x = 2$ e tem máximo relativo em $x = -8$.

7.1. C

7.2. D

7.3. b) $\frac{5}{9}$

7.3. c) A função h é crescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, +\infty[$ e não tem extremos relativos.

7.3. d) $a = 3$ e $b = 1$

7.3. e) A função g é decrescente em $]-\infty, -\sqrt{3}]$ e em $]0, \sqrt{3}]$, é crescente em $[-\sqrt{3}, 0[$ e em $[\sqrt{3}, +\infty[$, tem mínimo relativo em $x = -\sqrt{3}$ e em $x = \sqrt{3}$.

8.1. a) $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

8.1. b) A função g é decrescente em $[-2, -\frac{4}{3}]$ é crescente em $[-\frac{4}{3}, +\infty[$, tem máximo relativo em $x = -2$ e mínimo relativo em $x = -\frac{4}{3}$.

8.1. c) $y = 8x - 15$

8.2. b) Área mínima: $A(\sqrt[3]{9}) = 36\sqrt[3]{3}$
