FICHAS DE TRABALHO | 11.º ANO | COMPILAÇÃO

TEMA 4 | FUNÇÕES

Site: http://www.mathsuccess.pt

Facebook: https://www.facebook.com/MathSuccess

TEMA 4

FUNÇÕES

2016 – 2017

1. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 1 | Tema 4 | 11.º Ano | 2016 – 2017)

Sejam f e g duas funções tais que:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \dfrac{x^2+1}{x} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} g: &]-\infty,5] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \sqrt{5-x} \end{array}$$

1.1. Considere a função h definida em $\mathbb{R}$ por

$$h(x)=\begin{cases} g(x) & \text{se} \quad x\leq 0 \\ f(x) & \text{se} \quad x>0 \end{cases}$$

Utilizando definição de Heine, mostre que não existe $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$.

1.2. Determine, caso exista:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(f(x)\times g(x)\right)$

b) $\lim\limits_{x\to 1}(g\circ f)(x)$

1.3. Mostre que não existe $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{|x-4|}{g(x)-1}$.

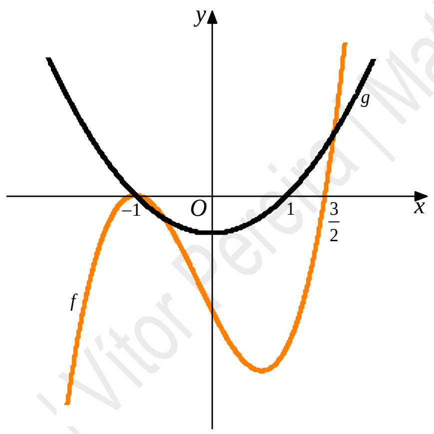
Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-11-ano/Tema4-ficha1-ex1.html

2. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 2 | Tema 4 | 11.º Ano | 2016 – 2017)

Na figura estão representadas partes dos gráficos de duas funções f e g de domínio $\mathbb{R}$, tais que:

- f é uma função polinomial de grau 3 e $f(-1)=f\left(\frac{3}{2}\right)=0$
- g é uma função quadrática que se anula em $x=-1$ e em $x=1$

Determine, caso exista:



2.1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{g(x)}{f(x)}$

2.2. $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)}{g(x)}$

2.3. $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)}{g(x)}$

2.4. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{f(x)}{g(x)}$

2.5. $\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{g(x)}{f(x)}$

2.6. $\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{g(x)}{f(x)}$

2.7. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{g(x)}{f(x)}$

2.8. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$

2.9. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{g(x)}{f(x)}$

2.10. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-11-ano/Tema4-ficha2-ex1.html

3. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 3 | Tema 4 | 11.º Ano | 2016 – 2017)

Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2-12}{2x-4} & \text{se} \quad x<2 \\ k^2-2k+7 & \text{se} \quad x=2\text{, com } k\in\mathbb{R} \\ \dfrac{3x-6}{\sqrt{x-1}-1} & \text{se} \quad x>2\end{cases}$$

1.1. Determine:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, resolvendo por dois processos distintos.

d) $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$

e) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$

1.2. Qual é o valor de k para o qual a função f é contínua em $\mathbb{R}$.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-11-ano/Tema4-ficha3-ex1.html

4. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 4 | Tema 4 | 11.º Ano | 2016 – 2017)

Seja f uma função de domínio $\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$, ímpar e contínua em todos os pontos do seu domínio, tais que:

- $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(f(x)-x\right)=0$

4.1. Indique a opção verdadeira. O gráfico de f:

A tem duas e apenas duas assimptotas distintas.

B tem três e apenas três assimptotas distintas.

C tem quatro e apenas quatro assimptotas distintas.

D não tem assimptotas.

4.2. Determine:

a) $\lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

4.3. Considere a expressão $x+\dfrac{x}{x^2-9}$.

a) Mostre que $x+\dfrac{x}{x^2-9}$ pode ser a expressão analítica da função f.

b) Admitindo que $f(x)=x+\dfrac{x}{x^2-9}$, determine o conjunto solução da inequação $f(x)<0$.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-11-ano/Tema4-ficha4-ex1.html

5. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 5 | Tema 4 | 11.º Ano | 2016 – 2017)

Funções Racionais. Derivadas.

5.1. A recta de equação $y=2x-6$ é tangente ao gráfico de uma função g, de domínio $\mathbb{R}$, no ponto de abcissa 3.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x\to 3}\frac{g(x)}{x^2-9}$?

A $\frac{1}{6}$ **B** $\frac{1}{4}$ **C** $\frac{1}{3}$ **D** $\frac{1}{2}$

5.2. Sejam f uma função de domínio $\mathbb{R}$ e a um número real não nulo tais que $t.v.m._{[a,3a]}(f)=4$ e $t.v.m._{[3a,6a]}(f)=5$. Qual é o valor de $t.v.m._{[a,6a]}(f)$?

A $\frac{19}{5}$ **B** $\frac{23}{5}$ **C** $\frac{27}{5}$ **D** $\frac{31}{5}$

5.3. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{b\}$, definida por $h(x)=a+\frac{b}{x-b}$, com $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, tal que $h(2b)=3$.

a) Mostre que $a=2$.

b) Considere agora que a recta de equação $x+3=0$ é assimptota vertical do gráfico de h.

b₁) Determine o conjunto solução da inequação $2h(x)\leq 2x-3$.

b₂) Determine, por definição, $h'(-1)$?

b₃) Seja t a recta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa -1.

Determine a área do triângulo $[ABC]$, onde:

- A é o ponto de intersecção da recta t com o eixo Ox
- B é o ponto de intersecção do gráfico de h com o eixo Oy
- C é o ponto de intersecção da recta t com o eixo Oy

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-11-ano/Tema4-ficha5-ex1.html

6. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 6 | Tema 4 | 11.º Ano | 2016 – 2017)

Sejam g e h as funções de domínios $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ e $\mathbb{R}$, respectivamente, definidas por:

$$g(x)=\frac{2x+1}{x+3} \qquad \text{e} \qquad h(x)=2x^3+5x^2-4x-3$$

6.1. Determine, por definição, $h'(-2)$.

6.2. O gráfico da função g tem dois pontos onde a recta tangente é perpendicular à recta de equação $x=-5y$.

Determine as coordenadas desses pontos.

6.3. Determine o contradomínio de g e caracterize a função inversa da função $g:\mathbb{R}\setminus\{-3\}\to\mathbb{R}\setminus\{2\}$, justificando primeiro que é bijectiva.

6.4. Considere a função $g\times h$.

a) Mostre que $(g\times h)(x)=(2x+1)^2(x-1)$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

b) Mostre que $(g\times h)'(x)=3(4x^2-1)$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ e estude a função $g\times h$ quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

6.5. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$, definida por $f(x)=g(x)(x-7)$.

a) Estude a função f quanto à existência de assimptotas do seu gráfico.

Caso existam, indique as suas equações.

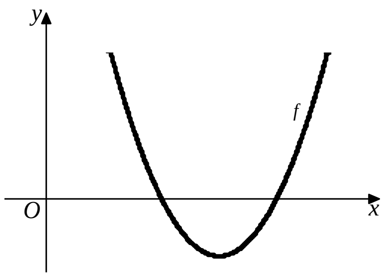
b) Estude a função f quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-11-ano/Tema4-ficha6-ex1.html

7. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 7 | Tema 4 | 11.º Ano | 2016 – 2017)

Derivadas. Teorema de Lagrange.

7.1. Na figura está representado, em referencial o.n. xOy, uma parábola que é o gráfico de uma função f, de domínio $\mathbb{R}$.



Seja f' a primeira derivada de f. Qual das seguintes pode ser a expressão analítica de f'?

A $2x+6$ **B** $-2x+6$ **C** $2x-6$ **D** $-2x-6$

7.2. Considere uma função f, derivável em $\mathbb{R}$, tais que $f(-2)=f(1)=3$ e $f(4)=-3$.

Qual das seguintes afirmações não é necessariamente verdadeira?

A $\exists c\in\left]-2,1\right[:\ f'(c)=0$

B $\exists c\in\left]1,4\right[:\ f'(c)=-2$

C $\exists c\in\left]-2,4\right[:\ f'(c)=-1$

D $\exists c\in\left]1,4\right[:\ f'(c)=0$

7.3. Seja h a função de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ tais que $h(3)=6$, cuja derivada, também de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, é definida por $h'(x)=x^2+\dfrac{9}{x^2}$.

a) Justifique que h é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

b) Determine $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2h(x)-12}{h(x)(x^2-9)}$.

c) Estude a função h quando à monotonia e à existência de extremos relativos.

d) Considere agora que $h(x)=\dfrac{bx^4-27}{ax}$, com $a,b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Determine a e b.

e) Seja g a função de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ definida por $g(x)=h'(x)$.

Estude a função g quando à monotonia e à existência de extremos relativos.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-11-ano/Tema4-ficha7-ex1.html

8. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 8 | Tema 4 | 11.º Ano | 2016 – 2017)

Derivadas. Optimização

8.1. Sejam f, g e h três funções tais que:

- a função f tem domínio $\mathbb{R}$, $f(2)=4$ e $f'(2)=2$
- a função g tem domínio $[-2,+\infty[$ e é definida por $g(x)=x\sqrt{x+2}$
- a função h tem domínio $]-2,+\infty[\setminus\{0\}$ e é definida por $h(x)=\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

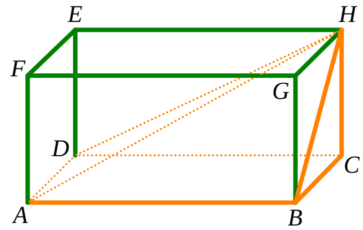
a) Determine, por definição, $g'(1)$.

b) Estude a função g quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

c) Escreva a equação reduzida da recta perpendicular à recta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa 2.

8.2. Na figura estão representados o prisma recto $[ABCDEFGH]$ e a pirâmide recta $[ABCDE]$ cujo volume é 8.

Sabe-se que:



- $\overline{AB} = 2\overline{BC}$
- $[ABCD]$ é um rectângulo

Seja x a medida do comprimento do lado $[BC]$, com $x > 0$.

a) Mostre que a área total do prisma $[ABCDEFGH]$ é dada em função de x por $A(x) = 4x^2 + \frac{72}{x}$.

b) Determine a área total mínima que o prisma $[ABCDEFGH]$ pode tomar.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-11-ano/Tema4-ficha8-ex1.html

Solucionário

1.2. **a)** $-\infty$

1.2. **b)** $\sqrt{3}$

2.1. 0

2.2. $-\infty$

2.3. $+\infty$

2.4. 0

2.5. $+\infty$

2.6. $-\infty$

2.7. 0

2.8. $+\infty$

2.9. 0

2.10. $-\infty$

3.1. **a)** $-\infty$

3.1. **b)** $\frac{3}{2}$

3.1. **c)** $+\infty$

3.1. **d)** 6

3.1. **e)** 6

3.2. $k=1$

4.1. B

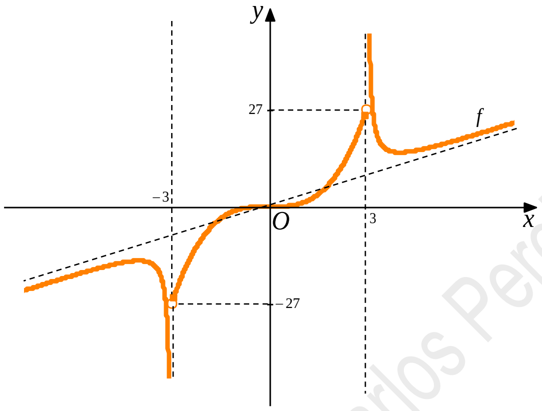
4.2. **a)** $-\infty$

4.2. **b)** 1

4.3. **b)**

4.3. **b)** $\left]-\infty,-3\right[\cup\left]-2\sqrt{2},0\right[\cup\left]2\sqrt{2},3\right[$

4.4.



5.1. C

5.2. B

5.3. **b₁)** $\left]-3,-\frac{5}{2}\right]\cup\left[3,+\infty\right[$

5.3. **b₂)** $g'(-1)=\frac{3}{4}$

5.3. **b₃)** $A_{[ABC]}=\frac{5}{24}$

6.1. $h'(-2)=0$

6.2. $(-2,-3)$ e $(-4,7)$

6.3. $g^{-1}:\mathbb{R}\setminus\{2\}\to\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ tal que $g^{-1}(x)=\frac{3x-1}{2-x}$

6.4. **b)** A função $g\times h$ é decrescente em $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$, é crescente em $\left]-\infty,-3\right[$ em $\left]-3,-\frac{1}{2}\right]$ e em $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$, tem mínimo relativo em $x=\frac{1}{2}$ e tem máximo relativo em $x=-\frac{1}{2}$.

6.5. **a)** A.V.: $x=-3$; A.O.: $y=2x-19$, quando $x\to\pm\infty$;

6.5. **b)** A função f é decrescente em $\left[-8,-3\right[$ e em $\left]-3,2\right]$, é crescente em $\left]-\infty,-8\right]$ e em $\left[2,+\infty\right[$, tem mínimo relativo em $x=2$ e tem máximo relativo em $x=-8$.

7.1. C

7.2. D

7.3. **b)** $\frac{5}{9}$

7.3. **c)** A função h é crescente em $\left]-\infty,0\right[$ e em $\left]0,+\infty\right[$ e não tem extremos relativos.

7.3. **d)** $a=3$ e $b=1$

7.3. **e)** A A função g é decrescente em $\left]-\infty,-\sqrt{3}\right]$ e em $\left]0,\sqrt{3}\right]$, é crescente em $\left[-\sqrt{3},0\right[$ e em $\left[\sqrt{3},+\infty\right[$, tem mínimo relativo em $x=-\sqrt{3}$ e em $x=\sqrt{3}$..

8.1. **a)** $\frac{7\sqrt{3}}{6}$

8.1. **b)** A função g é decrescente em $\left[-2,-\frac{4}{3}\right]$ é crescente em $\left[-\frac{4}{3},+\infty\right[$, tem máximo relativo em $x=-2$ e mínimo relativo em $x=-\frac{4}{3}$.

8.1. **c)** $y=8x-15$

8.2. **b)** Área mínima: $A\left(\sqrt[3]{9}\right)=36\sqrt[3]{3}$