FICHAS DE TRABALHO | 11.º ANO | COMPILAÇÃO

TEMA 3 | SUCESSÕES

Site: http://www.mathsuccess.pt

Facebook: https://www.facebook.com/MathSuccess

TEMA 3

SUCESSÕES

2016 – 2017

1. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 1 | Tema 3 | 11.º Ano | 2016 – 2017)

Considere a sucessão (u_n) definida por

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 2 \\ 2 \times u_n = u_{n-1}, \quad \forall n > 2 \end{cases}$$

1.1. Determine o valor de $u_5 - u_4 + u_3$.

1.2. Estude a sucessão (u_n) quanto à monotonia.

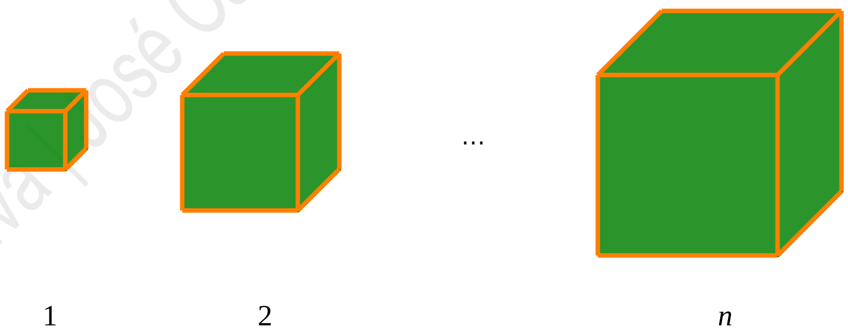
1.3. Justifique que (u_n) é uma sucessão limitada e indique o maior dos minorantes e o menor dos majorantes.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-11-ano/Tema3-ficha1-ex1.html

2. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 2 | Tema 3 | 11.º Ano | 2016 – 2017)

Na figura está representada uma sequência de cubos.

Sabe-se que a medida do comprimento da aresta do primeiro cubo é 1 e que a aresta de cada cubo mede mais uma unidade que a aresta do cubo anterior.



1.1. A expressão $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ dá a soma dos volumes dos n cubos.

Mostre, utilizando o princípio de indução Matemática, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

1.2. Considere três cubos consecutivos.

Seja $n \in \mathbb{N}$ a medida do comprimento da aresta do cubo com menor volume.

Utilizando o princípio de indução Matemática, mostre que a soma dos volumes dos três cubos é um múltiplo de 9.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-11-ano/Tema3-ficha2-ex1.html

3. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 3 | Tema 3 | 11.º Ano | 2016 – 2017)

Sejam (u_n) e (v_n) duas sucessões tais que:

- (u_n) é uma progressão aritmética
- $v_3 = 5$
- $v_n = \dfrac{u_n + 5}{2}$

3.1. Mostre que a sucessão (v_n) é uma progressão aritmética.

3.2. Admita que $u_6 = 11$.

a) Mostre que $u_n = 2n - 1$ e determine o termo geral da sucessão (v_n).

b) Determine $\sum_{k=8}^{22} u_k$.

c) Determine N de modo que a soma dos N primeiros termos da sucessão $(u_n + v_n)$ seja 209.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-11-ano/Tema3-ficha3-ex1.html

4. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 4 | Tema 3 | 11.º Ano | 2016 – 2017)

Seja (u_n) uma progressão aritmética tais que:

- a soma dos primeiros quatro termos de (u_n) é 28
- $u_7 = 16$

4.1. Determine o termo geral de (u_n).

4.2. Considere a sucessão (v_n) definida por $v_n = \frac{u_n}{n}$

a) Mostre que (v_n) é monótona decrescente.

b) A sucessão (v_n) é limitada?

4.3. Considere a progressão aritmética (w_n) tal que $w_8 = 19$ e $w_{14} = \frac{59}{2}$.

a) Sem determinar o termo geral de (w_n) determine w_{500}.

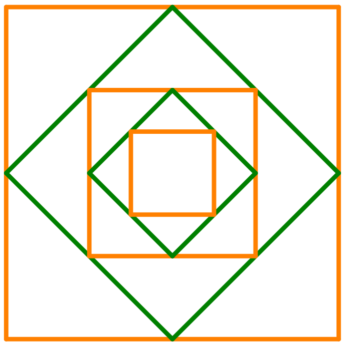
b) Determine a soma de todos os termos consecutivos de (w_n) entre o quinto e o décimo nono, excluindo-os.

c) Mostre que a sucessão (a_n), definida por $a_n = 2w_n - 3u_n$, é uma progressão aritmética e indique a sua razão.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-11-ano/Tema3-ficha4-ex1.html

5. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 5 | Tema 3 | 11.º Ano | 2016 – 2017)

Considere uma sucessão de quadrados onde o quadrado seguinte se obtém unindo os pontos médios do quadrado anterior.



Sejam l o lado do quadrado inicial e (a_n) e (p_n), respectivamente, as sucessões das áreas e dos perímetros dos quadrados.

5.1. Justifique que (a_n) e (p_n) são progressões geométricas indicando a respectiva razão.

5.2. Sabe-se que $a_4 = \frac{1}{8}$.

Determine o valor de $l + p_5 + a_2$.

5.3. Utilizando o Método de Indução Matemática, mostre que área total dos n primeiros quadrados é dada por $l^2\left(2-2^{1-n}\right)$ para todo o $n \in \mathbb{N}$.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-11-ano/Tema3-ficha5-ex1.html

6. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 6 | Tema 3 | 11.º Ano | 2016 – 2017)

Definição de Limite de uma Sucessão. Limites de Sucessões.

6.1. Considere a sucessão (u_n) definida por $u_n = \frac{n+1}{n}$.

a) Determine a ordem a partir da qual todos os termos de (u_n) pertencem à vizinhança de 1 a menos de uma centésima.

b) Mostre, por definição, que $\lim(u_n) = 1$.

c) Mostre, por definição, que $\lim \frac{1}{nu_n} = 0$.

6.2. Determine o valor de:

a) $\lim \frac{1-2n}{3n}$

b) $\lim \frac{1-n}{3}$

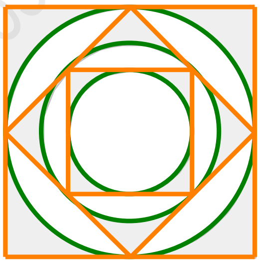
c) $\lim \frac{\operatorname{sen}(n)}{n+1}$

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-11-ano/Tema3-ficha6-ex1.html

7. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 7 | Tema 3 | 11.º Ano | 2016 – 2017)

Na figura está representada uma sequência de circunferências e quadrados alternados. Cada circunferência está inscrita num quadrado e, com excepção do primeiro, cada quadrado está inscrito numa circunferência.

A cinza pinta-se a área de cada região entre o quadrado e a circunferência nele inscrito ficando a branco a área de cada região entre a circunferência e o quadrado nela inscrita, como sugere a figura.



Sejam $a_n = (4-\pi)\times 2^{1-n}$, onde (a_n) dá a área da n-ésima região pintada a cinza; (b_n) uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$, onde (b_n) dá a área da n-ésima região a branco e $S_a(n)$ e $S_b(n)$ a soma n dos primeiros termos de (a_n) e (b_n), respectivamente.

7.1. Determine o lado do quadrado inicial e determine o termo geral de (b_n).

7.2. Sem efectuar quaisquer cálculos, apenas analisando o contexto da situação descrita, conjecture acerca do valor da soma $S_a(n)+S_b(n)$ quando n tende para $+\infty$, ou seja, conjecture acerca do valor de $\lim\left(S_a(n)+S_b(n)\right)$ e interprete o resultado no contexto da situação descrita.

7.3. Determine o termo geral das sucessões $(S_a(n))$ e $(S_b(n))$

7.4. Determine analiticamente os valores de $\lim(S_a(n))$ e $\lim(S_b(n))$ e em seguida confirme o resultado que conjecturou em 1.2..

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-11-ano/Tema3-ficha6-ex1.html

Solucionário

1.1. $\frac{3}{4}$

1.2. (u_n) não é monótona

1.3. Maior dos minorantes: 0; Menor dos majorantes: 2; $0 < u_n \leq 2$

3.2. **a)** $v_n = n + 2$

3.2. **b)** 435

3.2. **c)** $N = 11$

4.1. $u_n = 2n + 2$

4.2. **b)** Sim, $2 < v_n \leq 4$, $\forall n \in \mathbb{N}$

4.3. **a)** 880

4.3. **b)** 338

4.3. **c)** (a_n) é progressão aritmética de razão $-\frac{5}{2}$

5.2. $\frac{5}{2}$

6.1. **a)** 101, inclusive.

6.2. **a)** $-\frac{2}{3}$

6.2. **b)** $-\infty$

6.3. **c)** 0

7.1. 2; $b_n = (\pi - 2) \times 2^{1-n}$

7.2. 4; Quando $n \to +\infty$, a soma das áreas a cinza e a branco tende para 4, que é a área do quadrado inicial.

7.3. $S_a(n) = (8 - 2\pi) \times (1 - 2^{-n})$; $S_b(n) = (2\pi - 4) \times (1 - 2^{-n})$

7.4. $8 - 2\pi$; $2\pi - 4$