FICHA DE TRABALHO | 11.º ANO | COMPILAÇÃO

TEMA 1 | TRIGONOMETRIA

Site: http://www.mathsuccess.pt

Facebook: https://www.facebook.com/MathSuccess

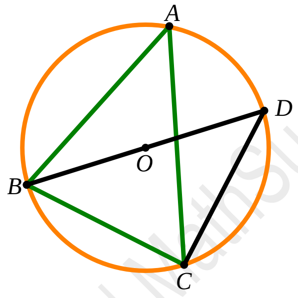
TEMA 1

TRIGONOMETRIA

1. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 1 | Tema 1 | 11.º Ano | 2016 – 2017)

Na figura estão representados uma circunferência de raio r centrada em O e dois triângulos $[ABC]$ e $[BCD]$, inscritos na circunferência.

Sabe-se que:



- os ângulos BAC e BDC estão inscritos no mesmo arco
- $[BD]$ é um diâmetro da circunferência

Mostre que $\dfrac{\overline{BC}}{\operatorname{sen}(B\hat{A}C)} = 2r$ e em seguida mostre a Lei dos Senos.

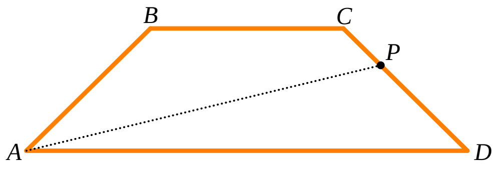
Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-11-ano/Tema1-ficha1-ex1.html

2. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 2 | Tema 1 | 11.º Ano | 2016 – 2017)

Na figura abaixo está representado o trapézio $[ABCD]$ isósceles de área $\dfrac{125}{4}$ e cuja medida do comprimento da sua base menor é 10.

Seja P um ponto do segmento $[CD]$.

Sabe-se que:



- $B\hat{A}D = 45^{\circ}$
- $\overline{PD} = 3$

Em qual das opções está um valor aproximado de $\overline{AP}$, a menos de uma décima?

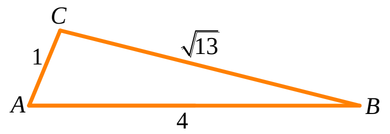
A $13{,}1$ **B** $13{,}3$ **C** $13{,}5$ **D** $13{,}7$

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-11-ano/Tema1-ficha2-ex1.html

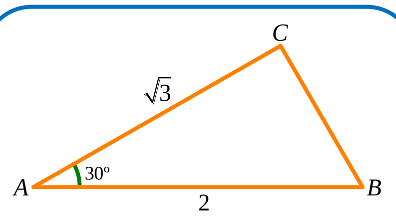
3. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 3 | Tema 1 | 11.º Ano | 2016 – 2017)

Faça corresponder cada triângulo ao método que utilizaria para resolver cada um deles.

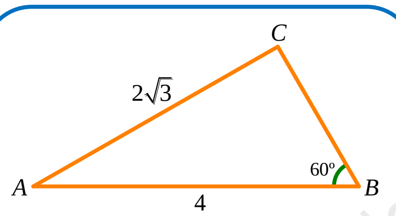
Nota: resolver um triângulo consiste em identificar as medidas dos seus lados e as amplitudes dos seus ângulos internos.



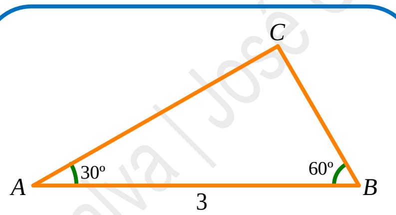
Triângulo 1



Triângulo 2



Triângulo 3



Triângulo 4

Método 1

1.º) Soma da amplitude dos ângulos internos de um triângulo

2.º) Lei do Senos

3.º) Lei do Senos

Método 2

1.º) Lei do Senos

2.º) Soma da amplitude dos ângulos internos de um triângulo

3.º) Lei do Senos

Método 3

1.º) Lei dos Co-senos

2.º) Lei do Senos

3.º) Soma da amplitude dos ângulos internos de um triângulo

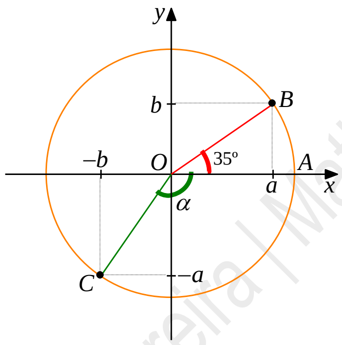
Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-11-ano/Tema1-ficha3-ex1.html

4. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 4 | Tema 1 | 11.º Ano | 2016 – 2017)

Na figura está representada em referencial o.n. xOy a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(1,0)$
- a amplitude do ângulo orientado AOB é 35°
- a amplitude do ângulo orientado AOC é α
- os ângulo AOB e AOC têm o mesmo lado origem
- o ponto B tem coordenadas (a,b)
- o ponto C tem coordenadas $(-b,-a)$



4.1. Qual dos seguintes ângulos generalizados representa o ângulo de amplitude $\alpha + 2000^\circ$?

A $(235^\circ, 5)$

B $(75^\circ, 6)$

C $(75^\circ, 5)$

D $(-285^\circ, 6)$

4.2. Determine, em função de a e de b, o valor de:

$$\operatorname{tg}(595^\circ) - \operatorname{sen}(-1135^\circ) - \cos(395^\circ) + \operatorname{tg}(755^\circ)$$

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-11-ano/Tema1-ficha4-ex1.html

5. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 5 | Tema 1 | 11.º Ano | 2016 – 2017)

Seja $\alpha \in \left]-\pi, 0\right[$ tal que $A(\alpha) = \operatorname{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + 2\cos(\alpha - 3\pi)$.

5.1. Quais são os valores de k que tornam possível a equação $A(\alpha) = k^2 - 6$?

A $\left]-3, 3\right[$

B $\left]-3, -\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}, 3\right[$

C $\left[-3, -\sqrt{3}\right] \cup \left[3, \sqrt{3}\right]$

D $[-3, 3]$

5.2. Admita agora que $A(\alpha)<0$.

Qual dos seguintes designa um número real positivo?

A $\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

B $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{sen}\alpha$

C $\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha$

D $\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha$

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-11-ano/Tema1-ficha5-ex1.html

6. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 6 | Tema 1 | 11.º Ano | 2016 – 2017)

Sejam t e g, duas funções reais de variável real definidas por:

$$t(x)=-3\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right) \quad \text{e} \quad g(x)=\frac{1+\left(\operatorname{sen}\left(\frac{x}{3}\right)\cos\left(\frac{x}{3}\right)\right)^2+\cos^4\left(\frac{x}{3}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{3}\right)}$$

6.1. Determine o domínio de g e mostre que $g(x)=2+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{3}\right)$.

6.2. Mostre que a função g é par.

6.3. Determine analiticamente o período mínimo positivo da função t e aproveite para mostrar que t não é injectiva.

6.4. Seja $\beta\in\left]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right[$ tal que $t\left(4\beta+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{3}$. Determine o valor exacto de $g(6\beta)$.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-11-ano/Tema1-ficha6-ex1.html

7. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 7 | Tema 1 | 11.º Ano | 2016 – 2017)

Considere a função $g:[-\pi,\pi]\to[-2,4]$, bijectiva, definida por:

$$g(x)=k-2+k\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right), \text{ com } k\in\mathbb{R}^+$$

7.1. Mostre que $k=3$.

7.2. Determine o conjunto solução da equação $(1-g(x))\left(\frac{1}{\cos^2 x}-2\right)=0$.

7.3. Determine o conjunto solução da inequação $2g(x)-2\geq 3\sqrt{3}$.

7.4. Sabendo que $\text{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$ e $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$, determine o valor de $g(2\alpha+\pi)$.

7.5. Seja g^{-1} a função inversa de g.

a) Caracterize g^{-1}.

b) Determine $\text{tg}\left(\frac{1}{2}g^{-1}\left(\frac{17}{5}\right)\right)$.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-11-ano/Tema1-ficha7-ex1.html

8. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 8 | Tema 1 | 11.º Ano | 2016 – 2017)

Considere a função f definida por $2+\text{arcsen}(|x|-1)$.

8.1. Determine, analiticamente, o domínio e contradomínio de f.

8.2. Averigue se a função f tem inversa e, em caso afirmativo, caracterize-a.

8.3. Sejam s_1 e s_2 as soluções da equação $f(x)=\frac{\pi+8}{4}$. Mostre que $s_1\times s_2+f(-1)=\frac{1-2\sqrt{2}}{2}$.

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-11-ano/Tema1-ficha8-ex1.html

9. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 9 | Tema 1 | 11.º Ano | 2016 – 2017)

Considere duas funções f e g, de domínio $\mathbb{R}$, definidas por $f(x)=\text{sen}\, x$ e $g(x)=\text{arctg}\, x$.

9.1. Mostre que $(f\circ g)(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ e determine o contradomínio de $f\circ g$.

9.2. Estude a função $f\circ g$ quanto à paridade e injectividade.

9.3. Resolva a equação $(f\circ g)(x)=\frac{1}{2}$ por dois processos analíticos distintos.

9.4. Resolva as seguintes condições:

a) $f\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{x}{2}\right) \wedge x\in\mathbb{R}$

b) $\left(2f(x)-\sqrt{3}\right)\left(\operatorname{tg}(3x)+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0 \wedge x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

c) $\cos(2x)=f\left(\frac{\pi}{7}\right) \wedge x\in\left]-\pi,0\right]$

Proposta de Resolução aqui: http://www.mathsuccess.pt/matematica-11-ano/Tema1-ficha9-ex1.html

10. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 5 | Tema 2 | 12.º Ano | 2017 – 2018)

10.1. Seja h a função de domínio $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$, definida por $h(x)=\left(\cos x-\frac{1}{\cos x}\right)^2$.

a) Mostre que $h(x)=\operatorname{tg}^2 x\operatorname{sen}^2 x$.

b) Determine o valor exacto de $h(\operatorname{arctg}(2))$.

c) Mostre que a função h é par e admite π como período.

10.2. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$, definida por:

$$g(x)=2\operatorname{sen}^2(\pi+x)+\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-2\operatorname{tg}x\cos(2\pi-x)$$

a) Mostre que $g(x)=(\operatorname{sen}x-1)^2$.

b) Determine as soluções da equação $4g(x)=1$ pertencentes ao intervalo $\left]-\frac{3\pi}{2},\pi\right]$.

c) Seja $\theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ tais que $\operatorname{tg}\theta=\frac{5}{12}$ e $g(\theta)=1-5m^2$, com $m\in\mathbb{R}$.

Determine o(s) valor(es) de m.

Proposta de Resolução aqui: https://www.mathsuccess.pt/matematica-12-ano/Tema2-ficha5-ex1-novo.html

Solucionário

2. A

3. Triângulo 1 $\rightarrow$ Método 3; Triângulo 1 $\rightarrow$ Método 3;

3. Triângulo 1 $\rightarrow$ Método 3; Triângulo 2 $\rightarrow$ Método 3; Triângulo 3 $\rightarrow$ Método 2; Triângulo 4 $\rightarrow$ Método 1

4.1. C

4.2. $\frac{1}{ab}$

5.1. B

5.2. C

6.1. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{2} + 3k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

6.3. 4π

6.4. $\frac{161}{80}$

7.2. $\left\{ -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right\}$

7.3. $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi \right]$

7.4. 2

7.5. **a)** $D_{g^{-1}} = [-2,4]$; $D'_{g^{-1}} = [-\pi, \pi]$; $g^{-1}(x) = 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{x-1}{3}\right)$

7.5. **b)** $\frac{4}{3}$

8.1. $D_f = [-2,2]$; $D'_f = \left[\frac{4-\pi}{2}, \frac{\pi+4}{2} \right]$

8.2. f não é injectiva, pelo que não tem inversa.

9.1. $]-1,1[$

9.2. Ímpar e injectiva

9.3. $\left\{ \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$

9.4. **a)** $x = \frac{\pi}{6} + \frac{4k\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{2} + 4k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

9.4. **b)** $\left\{ \frac{11\pi}{18}, \frac{2\pi}{3}, \frac{17\pi}{18} \right\}$

9.4. **b)** $\left\{ -\frac{23\pi}{28}, -\frac{5\pi}{28} \right\}$

10.1. **b)** $\frac{16}{5}$

10.2. **b)** $\left\{ -\frac{7\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right\}$

10.2. **c)** $m = -\frac{\sqrt{21}}{13} \vee m = \frac{\sqrt{21}}{13}$