



FICHAS DE TRABALHO | 10.º ANO | COMPILAÇÃO

TEMA 3 | GEOMETRIA

Site: <http://www.mathsuccess.pt>

Facebook: <https://www.facebook.com/MathSuccess>

## TEMA 3

## GEOMETRIA

2016 – 2017

1. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 1 | Tema 3 | 10.º Ano | 2016 – 2017)

Considere num referencial o.n.  $xOy$  ponto  $P$  de coordenadas  $(k + 3, -k^2 - 1)$ , com  $k \in \mathbb{R}$ .

1.1. Determine, justificando, o valor lógico da proposição:

O ponto  $P$  pode pertencer a qualquer um dos quatro quadrantes

1.2. Determine os valores de  $k$  de modo que o ponto  $P$  pertença:

- a) ao semi-eixo negativo das ordenadas.
- b) ao terceiro quadrante.
- c) à bissetriz dos quadrantes pares.

1.3. Considere dois pontos  $A$  e  $B$ , no mesmo referencial tal que:

- $P$  é o ponto médio do segmento de recta  $[AB]$
- os pontos  $A$  e  $B$  têm abcissas simétricas, sendo que a abcissa de  $A$  é positiva
- a ordenada de  $B$  é o triplo da ordenada de  $A$
- $\overline{AB} = 20$

Determine as coordenadas dos pontos  $A$ ,  $B$  e  $P$ .

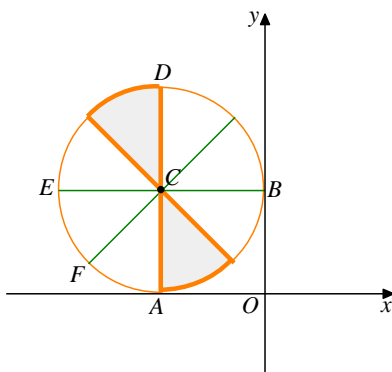
1.4. Admita agora que  $k = -3$ . Considere os pontos  $C$  e  $D$  de abcissas simétricas, não nulas e pertencentes ao eixo  $Ox$  e ainda o ponto  $E(1, -5)$ .

Sabendo que o ponto  $E$  pertence à mediatriz do segmento de recta  $[PD]$  determine uma equação da circunferência de diâmetro  $[CP]$ .

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-10-ano/Tema3-ficha1-ex1.html>

2. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 2 | Tema 3 | 10.º Ano | 2016 – 2017)

Na figura está representada, em referencial o.n.  $xOy$ , a circunferência de raio 1 e os pontos  $A, B, C, D, E$  e  $F$ .



Sabe-se que:

- a circunferência está centrada em  $C$  e é tangente aos eixos coordenados nos pontos  $A$  e  $B$
- $[BE]$  e  $[AD]$  são dois diâmetros da circunferência paralelos aos eixos  $Ox$  e  $Oy$ , respectivamente
- o círculo limitado pela circunferência está dividido em oito sectores com a mesma área, dois deles sombreados
- o ponto  $F$  pertence à circunferência e é equidistante dos pontos  $A$  e  $E$ .

2.1. Defina por uma condição a região a sombreado da figura, incluindo a fronteira.

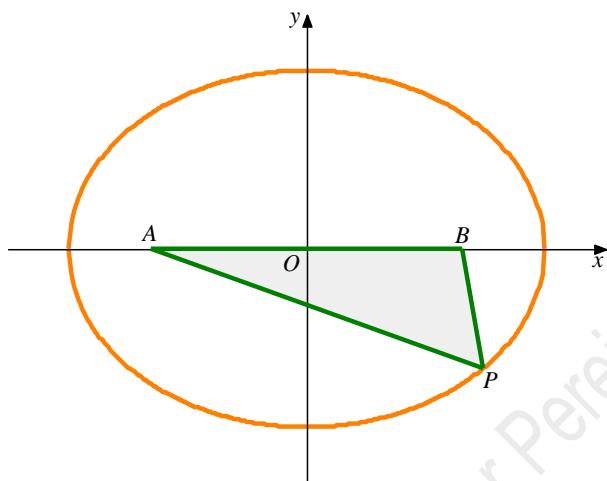
2.2. Determine as coordenadas do ponto  $F$ .

2.3. Mostre que a área do triângulo  $[ACF]$  é  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ .

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-10-ano/Tema3-ficha2-ex1.html>

3. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 3 | Tema 3 | 10.º Ano | 2016 – 2017)

Na figura está representada, em referencial o.n.  $xOy$ , a elipse definida pela equação  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ .



Sabe-se que:

- os pontos  $A$  e  $B$  são os focos da elipse
- o ponto  $P$  pertence à elipse e ao quarto quadrante
- a área do triângulo  $[ABP]$  é  $2\sqrt{7}$

3.1. Determine as coordenadas do ponto  $P$ .

3.2. Averigue se a origem do referencial pertence à mediatriz do segmento de recta  $[BP]$ .

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-10-ano/Tema3-ficha3-ex1.html>

4. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 4 | Tema 3 | 10.º Ano | 2016 – 2017)

Considere num referencial  $xOy$  uma elipse, centrada na origem, cujos focos são os pontos  $A(k,0)$  e  $B(-k,0)$ , com  $k \in \mathbb{R}^+$ .

Sabe-se que para qualquer ponto  $P(x, y)$  do plano, pertencente à elipse, se tem  $d(P, A) + d(P, B) = 10$ .

4.1. Qual das seguintes afirmações é necessariamente falsa?

**A**  $k = 1$

**B**  $k = \frac{3}{2}$

**C**  $k = 3$

**D**  $k = 5$

4.2. Sabe-se que:

- a bissetriz dos quadrantes ímpares intersecta a elipse em dois pontos,  $C$  e  $D$
- a bissetriz dos quadrantes pares intersecta a elipse em dois pontos,  $E$  e  $F$ .

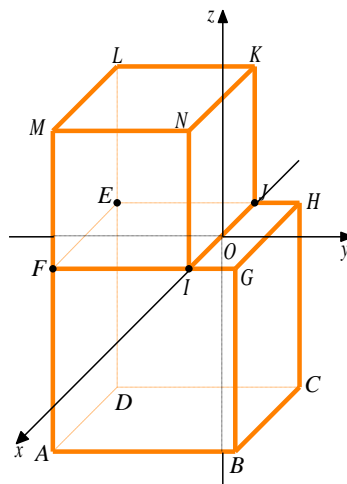
Mostre que a área do quadrilátero  $[CDEF]$  é dada em função de  $k$  pela seguinte expressão:

$$\frac{(50 - 10k)(50 + 10k)}{50 - k^2}, \quad k \in ]0, 5[$$

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-10-ano/Tema3-ficha4-ex1.html>

5. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 5 | Tema 3 | 10.º Ano | 2016 – 2017)

Considere, num referencial o.n.  $Oxyz$ , cubo  $[ABCDEFGH]$  e o paralelepípedo  $[EHIJKLMN]$



Sabe-se que:

- a origem é o ponto médio do segmento de recta  $[IJ]$  e a face do cubo  $[EFGH]$  está contida no plano  $xOy$
- o volume do cubo é 64 e  $\overline{BL} = 9$
- a razão entre o volume do cubo e o volume do prisma é  $\frac{16}{9}$

5.1. Mostre que as coordenadas do ponto  $L$  são  $(-2, -3, 3)$

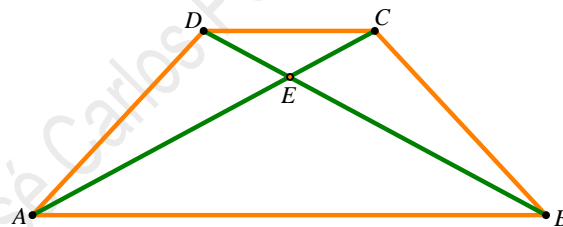
5.2. Investigue se o plano mediador do segmento de recta  $[FK]$  intersecta a aresta  $[BG]$ . Em caso afirmativo indique as coordenadas do ponto de intersecção.

5.3. Determine a equação da esfera de centro no ponto  $I$  e tangente ao plano  $FMK$ .

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-10-ano/Tema3-ficha5-ex1.html>

6. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 6 | Tema 3 | 10.º Ano | 2016 – 2017)

Na figura está representado o trapézio isósceles  $[ABCD]$  e as suas diagonais  $[AC]$  e  $[BD]$ .



Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 3\overline{DC}$
- a área do trapézio é  $40\text{cm}^2$  e a medida do comprimento da sua altura é  $10\text{cm}$ .

6.1. Utilizando apenas as letras da figura, quantos vectores não nulos é possível definir?

6.2. Complete:

a)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EB} = \underline{\hspace{2cm}}$

b)  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE} - \underline{\hspace{2cm}} = \overrightarrow{BE}$

c)  $A + \overrightarrow{DC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} = \underline{\hspace{2cm}}$

6.3. Mostre que  $\|\overrightarrow{DC}\| = 2 \text{ cm}$ .

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-10-ano/Tema3-ficha6-ex1.html>

7. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 7 | Tema 3 | 10.º Ano | 2016 – 2017)

Num plano munido de um referencial o.n.  $xOy$  considere, os pontos  $A(a, 2)$  e  $B(2, b)$ , com  $a, b \in \mathbb{R}^+$ .

Sabe-se que:

- $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{13}$

- o declive da recta  $AB$  é  $-\frac{2}{3}$

7.1. Determine as coordenadas do vector  $\overrightarrow{AB}$ .

7.2. Considere a recta  $r$  de equação  $y = x - 3$ .

Sabe-se que:

- a recta  $r$  intersecta a recta  $AB$  no ponto  $A$

- $P$  e  $Q$  são dois pontos da recta  $r$  cuja distância a  $A$  é  $4\sqrt{2}$ , sendo  $P$  o que tem maior abcissa.

a) Determine as coordenadas dos pontos  $P$  e  $Q$ .

b) Mostre que o perímetro do triângulo  $[BPQ]$  é  $8\sqrt{2} + \sqrt{37} + \sqrt{53}$ .

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-10-ano/Tema3-ficha7-ex1.html>

8. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 7 | Tema 3 | 10.º Ano | 2016 – 2017)

Num plano munido de um referencial o.n.  $xOy$  considere a recta  $r$ , que contém os pontos  $A(0,9)$  e  $B(-5,-11)$ .

8.1. Escreva:

- a) a equação reduzida da recta  $r$ .
- b) uma equação vetorial da recta  $r$ .
- c) um sistema de equações paramétricas que defina a recta  $r$ .

8.2. Sejam  $A$  e  $C$  os pontos de intersecção da recta  $r$  com os eixos coordenados.

Sejam  $E$  e  $F$ , respectivamente, os simétricos dos pontos  $A$  e  $C$  relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Classifique o quadrilátero  $[ACFE]$  quanto aos lados e determine a sua área.

8.3. Seja  $\vec{u}(a^2 - 4a, 4a)$  um vector director da recta  $s$  definida por:

$$(x, y) = A + k \left( \frac{1}{5} \overrightarrow{AB} + (a, a) \right), \quad k \in \mathbb{R}, \text{ com } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Determine os valores de  $a$ .

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-10-ano/Tema3-ficha8-ex1.html>

9. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 7 | Tema 3 | 10.º Ano | 2016 – 2017)

Considere, num referencial o.n.  $Oxyz$ , as rectas  $r$  e  $s$  de equações:

$$r: x=1 \wedge y=4 \quad \text{e} \quad s: (x, y, z) = (0, 8, -4) + k \left( \frac{1}{2}, -2, \frac{3}{2} \right), \quad k \in \mathbb{R}$$

9.1. Qual das seguintes condições define, num referencial o.n.  $Oxyz$ , um plano perpendicular à recta  $r$ ?

- A  $x = y$                        B  $x = 0$                        C  $y = 0$                        D  $z = 0$

9.2. Determine o ponto de intersecção das rectas  $r$  e  $s$ .



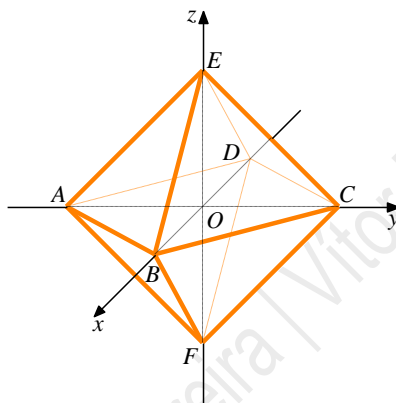
9.3. Seja  $A$  o ponto de intersecção da recta  $s$  com o plano  $xOz$ .

Determine as coordenadas do ponto  $B$ , pertencente à recta  $r$ , tal que  $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{17}$ .

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-10-ano/Tema3-ficha9-ex1.html>

10. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 7 | Tema 3 | 10.º Ano | 2016 – 2017)

Na figura está representado, em referencial o.n.  $Oxyz$ , o octaedro regular  $[ABCDEF]$  cujos vértices pertencem aos eixos coordenados.



Sabe-se que uma equação vectorial da recta  $CE$  é  $(x, y, z) = (0, -2, 5) + k(0, -2, 2)$ ,  $k \in \mathbb{R}$

10.1. Determine o volume do octaedro

10.2. Defina a aresta  $[BE]$  por uma condição vectorial.

10.3. Considere um ponto  $T$ , tal que o ponto  $M$ , de coordenadas  $(3, 2, 4)$  é o ponto médio do segmento de recta  $[DT]$ .

Escreva um sistema de equações paramétricas que defina a recta paralela a  $AF$  e que contém o ponto  $T$ .

10.4. Considere uma esfera circunscrita ao octaedro. A intersecção de um plano  $\alpha$ , de equação  $x = k$ , com  $k \in \mathbb{R}^-$ , com a esfera é círculo de área  $4\pi$ .

Determine uma condição que defina esse círculo.

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-10-ano/Tema3-ficha10-ex1.html>

Solucionário

1.1. Falsa, pois  $-k^2 - 1 < 0, \forall k \in \mathbb{R}$ , pelo que  $P$  só pode pertencer ao terceiro ou ao quarto quadrante.

1.2. a)  $k = -3$                       1.2. b)  $k \in ]-\infty, -3[$                       1.2. b)  $k \in \{-1, 2\}$

1.3.  $A(5\sqrt{3}, -5); B(-5\sqrt{3}, -15); P(0, -10)$                       1.4.  $(x+1)^2 + (y+5)^2 = 26$

2.1.  $(x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 1 \wedge ((x \geq -1 \wedge y \leq -x) \vee (x \leq -1 \wedge y \geq -x))$                       2.2.  $F\left(-\frac{2+\sqrt{2}}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$

3.1.  $P\left(\frac{4\sqrt{5}}{3}, -2\right)$

4.1. D

5.2. O plano mediador do segmento de recta  $[FK]$  não intersecta a aresta  $[BG]$ .                      5.3.  $(x-2)^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{144}{25}$

6.1. 20                      6.2. a)  $\overline{AB}$                       6.2. b)  $\overline{AB}$                       6.2. c)  $B$

7.1.  $(-3, 2)$                       7.2. a)  $P(9, 6)$  e  $Q(1, -2)$

8.1. a)  $y = 4x + 9$                       8.1. b)  $(x, y) = (0, 9) + k(-5, -20), k \in \mathbb{R}$  (por exemplo)

8.1. c)  $\begin{cases} x = -5k \\ y = 9 - 20k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$  (por exemplo)                      8.2. Trapézio isósceles;  $A_{\text{Trapézio isósceles}} = \frac{2025}{32}$

9.1. D                      9.2.  $(2, 0, 2)$                       9.3.  $B(1, 4, 2)$

10.1.  $V_{[ABCDEFG]} = 36$                       10.2.  $(x, y, z) = (3, 0, 0) + k(-3, 0, 3), k \in [0, 1]$

10.3.  $\begin{cases} x = 9 \\ y = 4 + 3k, k \in \mathbb{R} \text{ (por exemplo)} \\ z = 8 - 3k \end{cases}$                       10.4.  $y^2 + z^2 \leq 4 \wedge x = -\sqrt{5}$