



FICHAS DE TRABALHO | 10.º ANO | COMPILAÇÃO

TEMA 3 | GEOMETRIA

Site: <http://www.mathsuccess.pt>

Facebook: <https://www.facebook.com/MathSuccess>

TEMA 3

GEOMETRIA

2016 – 2017

1. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 1 | Tema 3 | 10.º Ano | 2016 – 2017)

Considere num referencial o.n. xOy ponto P de coordenadas $(k + 3, -k^2 - 1)$, com $k \in \mathbb{R}$.

1.1. Determine, justificando, o valor lógico da proposição:

O ponto P pode pertencer a qualquer um dos quatro quadrantes

1.2. Determine os valores de k de modo que o ponto P pertença:

- a) ao semi-eixo negativo das ordenadas.
- b) ao terceiro quadrante.
- c) à bissectriz dos quadrantes pares.

1.3. Considere dois pontos A e B , no mesmo referencial tal que:

- P é o ponto médio do segmento de recta $[AB]$
- os pontos A e B têm abcissas simétricas, sendo que a abcissa de A é positiva
- a ordenada de B é o triplo da ordenada de A
- $\overline{AB} = 20$

Determine as coordenadas dos pontos A , B e P .

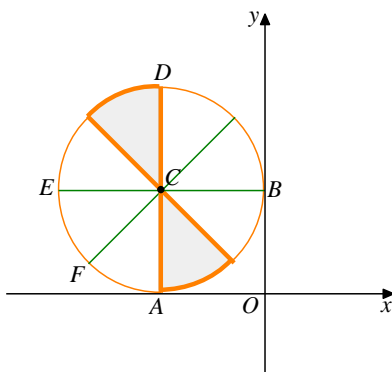
1.4. Admita agora que $k = -3$. Considere os pontos C e D de abcissas simétricas, não nulas e pertencentes ao eixo Ox e ainda o ponto $E(1, -5)$.

Sabendo que o ponto E pertence à mediatriz do segmento de recta $[PD]$ determine uma equação da circunferência de diâmetro $[CP]$.

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-10-ano/Tema3-ficha1-ex1.html>

2. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 2 | Tema 3 | 10.º Ano | 2016 – 2017)

Na figura está representada, em referencial o.n. xOy , a circunferência de raio 1 e os pontos A, B, C, D, E e F .



Sabe-se que:

- a circunferência está centrada em C e é tangente aos eixos coordenados nos pontos A e B
- $[BE]$ e $[AD]$ são dois diâmetros da circunferência paralelos aos eixos Ox e Oy , respectivamente
- o círculo limitado pela circunferência está dividido em oito sectores com a mesma área, dois deles sombreados
- o ponto F pertence à circunferência e é equidistante dos pontos A e E .

2.1. Defina por uma condição a região a sombreado da figura, incluindo a fronteira.

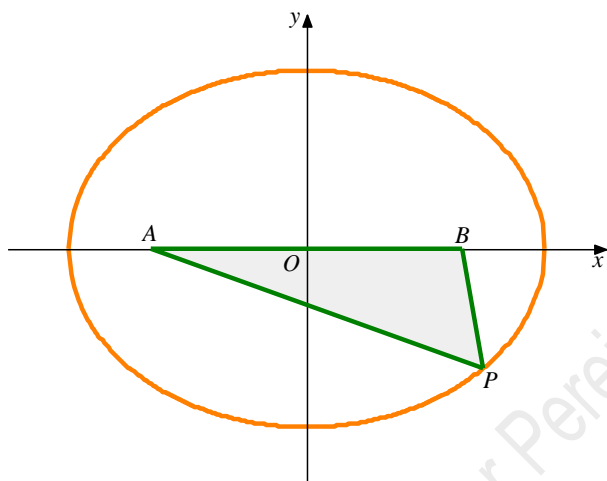
2.2. Determine as coordenadas do ponto F .

2.3. Mostre que a área do triângulo $[ACF]$ é $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-10-ano/Tema3-ficha2-ex1.html>

3. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 3 | Tema 3 | 10.º Ano | 2016 – 2017)

Na figura está representada, em referencial o.n. xOy , a elipse definida pela equação $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.



Sabe-se que:

- os pontos A e B são os focos da elipse
- o ponto P pertence à elipse e ao quarto quadrante
- a área do triângulo $[ABP]$ é $2\sqrt{7}$

3.1. Determine as coordenadas do ponto P .

3.2. Averigue se a origem do referencial pertence à mediatriz do segmento de recta $[BP]$.

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-10-ano/Tema3-ficha3-ex1.html>

4. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 4 | Tema 3 | 10.º Ano | 2016 – 2017)

Considere num referencial xOy uma elipse, centrada na origem, cujos focos são os pontos $A(k,0)$ e $B(-k,0)$, com $k \in \mathbb{R}^+$.

Sabe-se que para qualquer ponto $P(x, y)$ do plano, pertencente à elipse, se tem $d(P, A) + d(P, B) = 10$.

4.1. Qual das seguintes afirmações é necessariamente falsa?

A $k = 1$

B $k = \frac{3}{2}$

C $k = 3$

D $k = 5$

4.2. Sabe-se que:

- a bissetriz dos quadrantes ímpares intersecta a elipse em dois pontos, C e D
- a bissetriz dos quadrantes pares intersecta a elipse em dois pontos, E e F .

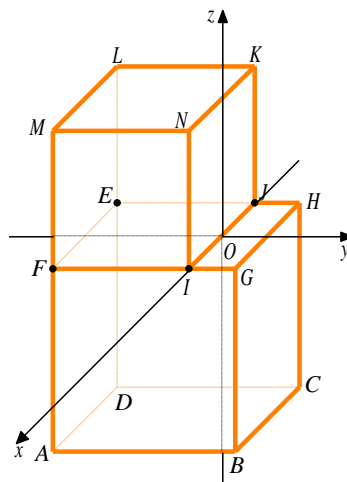
Mostre que a área do quadrilátero $[CDEF]$ é dada em função de k pela seguinte expressão:

$$\frac{(50 - 10k)(50 + 10k)}{50 - k^2}, \quad k \in]0, 5[$$

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-10-ano/Tema3-ficha4-ex1.html>

5. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 5 | Tema 3 | 10.º Ano | 2016 – 2017)

Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, cubo $[ABCDEFGH]$ e o paralelepípedo $[EHIJKLMN]$



Sabe-se que:

- a origem é o ponto médio do segmento de recta $[IJ]$ e a face do cubo $[EFGH]$ está contida no plano xOy
- o volume do cubo é 64 e $\overline{BL} = 9$
- a razão entre o volume do cubo e o volume do prisma é $\frac{16}{9}$

5.1. Mostre que as coordenadas do ponto L são $(-2, -3, 3)$

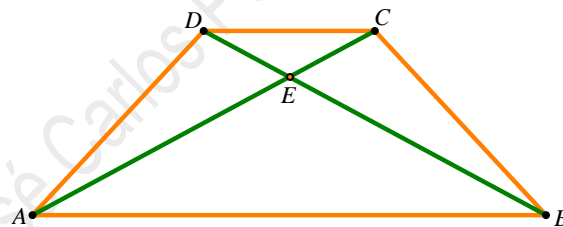
5.2. Investigue se o plano mediador do segmento de recta $[FK]$ intersecta a aresta $[BG]$. Em caso afirmativo indique as coordenadas do ponto de intersecção.

5.3. Determine a equação da esfera de centro no ponto I e tangente ao plano FMK .

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-10-ano/Tema3-ficha5-ex1.html>

6. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 6 | Tema 3 | 10.º Ano | 2016 – 2017)

Na figura está representado o trapézio isósceles $[ABCD]$ e as suas diagonais $[AC]$ e $[BD]$.



Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 3\overline{DC}$
- a área do trapézio é 40cm^2 e a medida do comprimento da sua altura é 10cm .

6.1. Utilizando apenas as letras da figura, quantos vectores não nulos é possível definir?

6.2. Complete:

a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EB} = \underline{\hspace{2cm}}$

b) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DE} - \underline{\hspace{2cm}} = \overrightarrow{BE}$

c) $A + \overrightarrow{DC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} = \underline{\hspace{2cm}}$

6.3. Mostre que $\|\overrightarrow{DC}\| = 2 \text{ cm}$.

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-10-ano/Tema3-ficha6-ex1.html>

7. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 7 | Tema 3 | 10.º Ano | 2016 – 2017)

Num plano munido de um referencial o.n. xOy considere, os pontos $A(a, 2)$ e $B(2, b)$, com $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Sabe-se que:

- $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{13}$

- o declive da recta AB é $-\frac{2}{3}$

7.1. Determine as coordenadas do vector \overrightarrow{AB} .

7.2. Considere a recta r de equação $y = x - 3$.

Sabe-se que:

- a recta r intersecta a recta AB no ponto A

- P e Q são dois pontos da recta r cuja distância a A é $4\sqrt{2}$, sendo P o que tem maior abcissa.

a) Determine as coordenadas dos pontos P e Q .

b) Mostre que o perímetro do triângulo $[BPQ]$ é $8\sqrt{2} + \sqrt{37} + \sqrt{53}$.

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-10-ano/Tema3-ficha7-ex1.html>

8. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 7 | Tema 3 | 10.º Ano | 2016 – 2017)

Num plano munido de um referencial o.n. xOy considere a recta r , que contém os pontos $A(0,9)$ e $B(-5,-11)$.

8.1. Escreva:

- a) a equação reduzida da recta r .
- b) uma equação vetorial da recta r .
- c) um sistema de equações paramétricas que defina a recta r .

8.2. Sejam A e C os pontos de intersecção da recta r com os eixos coordenados.

Sejam E e F , respectivamente, os simétricos dos pontos A e C relativamente à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Classifique o quadrilátero $[ACFE]$ quanto aos lados e determine a sua área.

8.3. Seja $\vec{u}(a^2 - 4a, 4a)$ um vector director da recta s definida por:

$$(x, y) = A + k \left(\frac{1}{5} \overrightarrow{AB} + (a, a) \right), \quad k \in \mathbb{R}, \text{ com } a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Determine os valores de a .

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-10-ano/Tema3-ficha8-ex1.html>

9. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 7 | Tema 3 | 10.º Ano | 2016 – 2017)

Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, as rectas r e s de equações:

$$r: x=1 \wedge y=4 \quad \text{e} \quad s: (x, y, z) = (0, 8, -4) + k \left(\frac{1}{2}, -2, \frac{3}{2} \right), \quad k \in \mathbb{R}$$

9.1. Qual das seguintes condições define, num referencial o.n. $Oxyz$, um plano perpendicular à recta r ?

- A $x = y$ B $x = 0$ C $y = 0$ D $z = 0$

9.2. Determine o ponto de intersecção das rectas r e s .

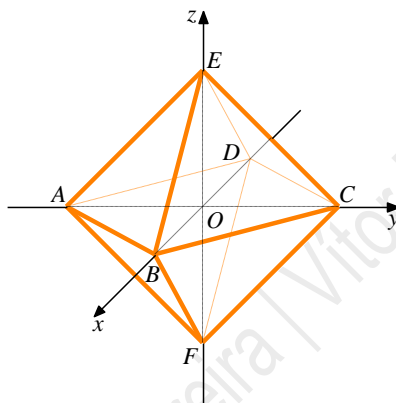
9.3. Seja A o ponto de intersecção da recta s com o plano xOz .

Determine as coordenadas do ponto B , pertencente à recta r , tal que $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{17}$.

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-10-ano/Tema3-ficha9-ex1.html>

10. (Exercício n.º 1 | Ficha de Trabalho n.º 7 | Tema 3 | 10.º Ano | 2016 – 2017)

Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o octaedro regular $[ABCDEF]$ cujos vértices pertencem aos eixos coordenados.



Sabe-se que uma equação vectorial da recta CE é $(x, y, z) = (0, -2, 5) + k(0, -2, 2)$, $k \in \mathbb{R}$

10.1. Determine o volume do octaedro

10.2. Defina a aresta $[BE]$ por uma condição vectorial.

10.3. Considere um ponto T , tal que o ponto M , de coordenadas $(3, 2, 4)$ é o ponto médio do segmento de recta $[DT]$.

Escreva um sistema de equações paramétricas que defina a recta paralela a AF e que contém o ponto T .

10.4. Considere uma esfera circunscrita ao octaedro. A intersecção de um plano α , de equação $x = k$, com $k \in \mathbb{R}^-$, com a esfera é círculo de área 4π .

Determine uma condição que defina esse círculo.

Proposta de Resolução aqui: <http://www.mathsuccess.pt/matematica-10-ano/Tema3-ficha10-ex1.html>

Solucionário

1.1. Falsa, pois $-k^2 - 1 < 0$, $\forall k \in \mathbb{R}$, pelo que P só pode pertencer ao terceiro ou ao quarto quadrante.

1.2. a) $k = -3$ 1.2. b) $k \in]-\infty, -3[$ 1.2. b) $k \in \{-1, 2\}$

2.1. $(x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 1 \wedge ((x \geq -1 \wedge y \leq -x) \vee (x \leq -1 \wedge y \geq -x))$

2.2. $F\left(-\frac{2+\sqrt{2}}{2}, \frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$

3.1. $P\left(\frac{4\sqrt{5}}{3}, -2\right)$

4.1. D

5.2. O plano mediador do segmento de recta $[FK]$ não intersecta a aresta $[BG]$.

5.3. $(x-2)^2 + y^2 + z^2 \leq \frac{144}{25}$

6.1. 20

6.2. a) \overline{AB}

6.2. b) \overline{AB}

6.2. c) B

7.1. $(-3, 2)$

7.2. a) $P(9, 6)$ e $Q(1, -2)$

8.1. a) $y = 4x + 9$

8.1. b) $(x, y) = (0, 9) + k(-5, -20)$, $k \in \mathbb{R}$ (por exemplo)

8.1. c) $\begin{cases} x = -5k \\ y = 9 - 20k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$ (por exemplo)

8.2. Trapézio isósceles; $A_{\text{Trapézio isósceles}} = \frac{2025}{32}$

9.1. D

9.2. $(2, 0, 2)$

9.3. $B(1, 4, 2)$

10.1. $V_{[ABCDEFG]} = 36$

10.2. $(x, y, z) = (3, 0, 0) + k(-3, 0, 3)$, $k \in [0, 1]$

10.3. $\begin{cases} x = 9 \\ y = 4 + 3k, k \in \mathbb{R} \text{ (por exemplo)} \\ z = 8 - 3k \end{cases}$

10.4. $y^2 + z^2 \leq 4 \wedge x = -\sqrt{5}$